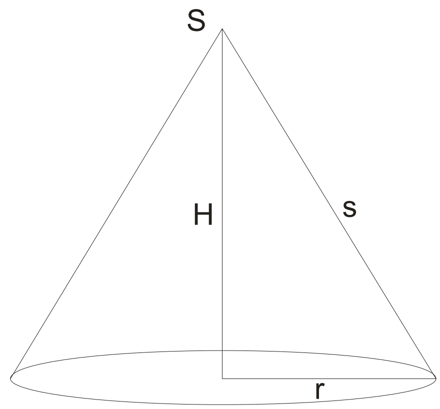
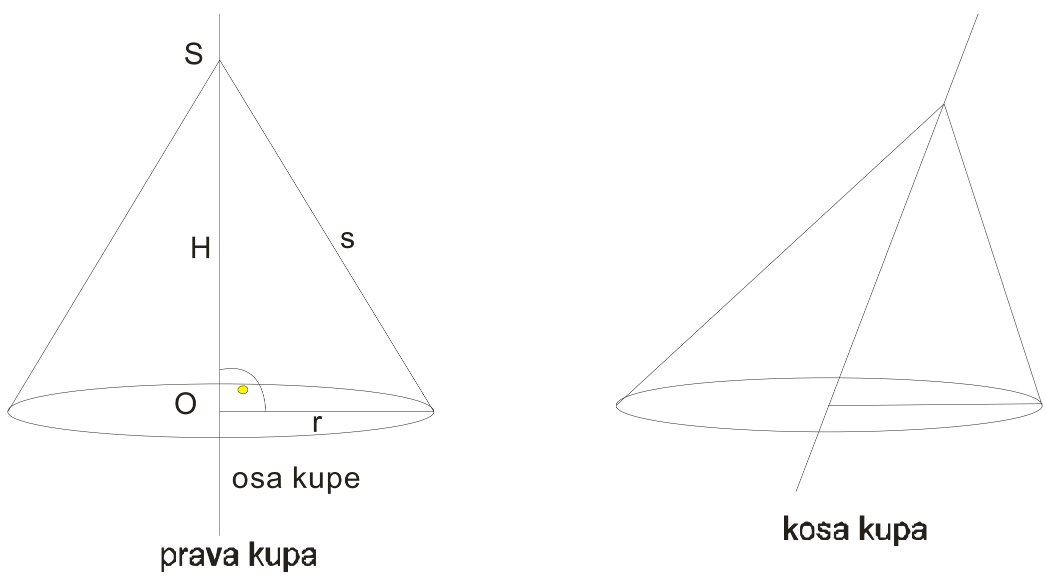
KUPA

Kupa je oblo feometrijsko telo čija je osnova krug, a omotač je deo obrtne konusne površi sa vrhom u tački S.



Osa kupe je prava koja prolazi kroz vrh kupe i centar osnove kupe . Ako je osa normalna na osnovu kupe reč je o **pravoj kupi**, inače se radi o kosoj kupi.



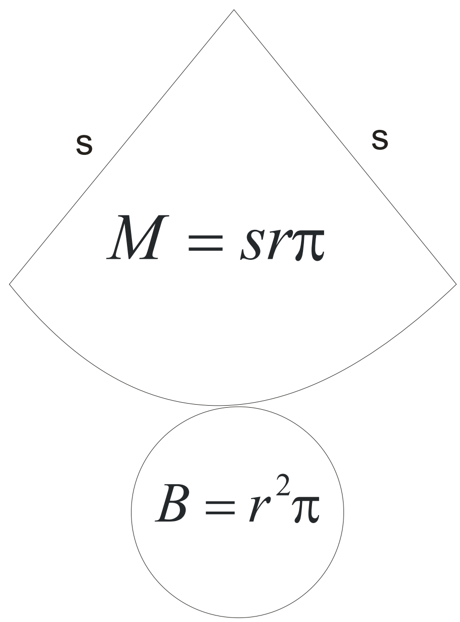
Obeležavanje:

- **r** je poluprečnik osnove(2r je prečnik osnove)
- **H** je visina kupe
- **s** je izvodnica kupe
- **B** je baza (osnova)
- **M** je omotač
- **P** površina, **V** zapremina

Opšte početne formule za površinu i zapreminu kupe iste su kao i formule za P i V piramide.

$$P = B + M \qquad \text{i} \qquad V = \frac{1}{3} B \cdot H$$

Pogledajmo najpre **mrežu** kupe.

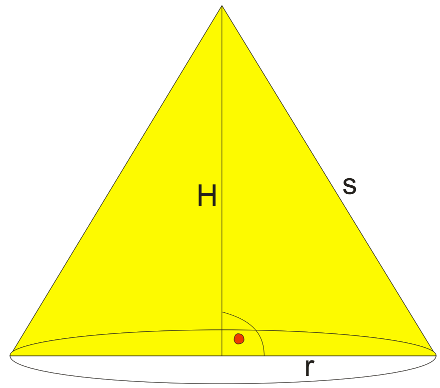


$$P = B + M \qquad\qquad V = \frac{1}{3} BH$$

$$P = r^2\pi + sr\pi \qquad\qquad V = \frac{1}{3} r^2\pi H$$

$$P = r\pi(r + s)$$

Pogledajmo i osni presek:



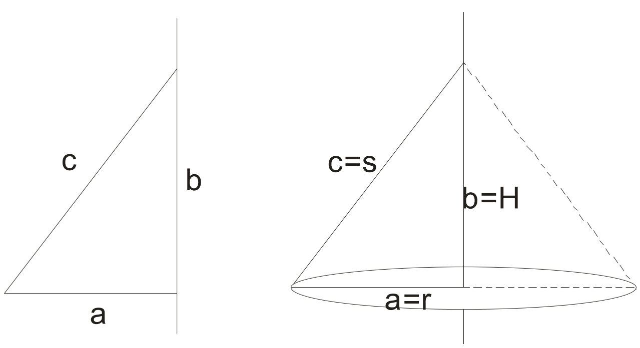
osni presek

Osni presek je trougao , čija je površina: $P_{op}=\frac{2r\cdot H}{2}$ to jest $P_{op}=r\cdot H$

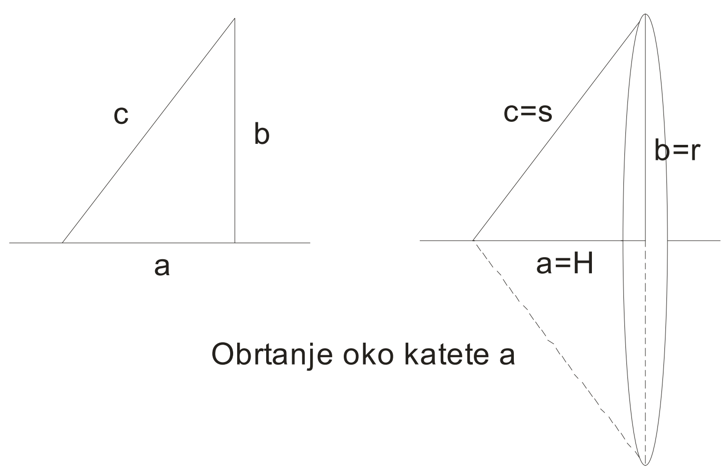
Još trebamo paziti da ako u tekstu zadatka kaže da se radi o **ravnostranoj kupi** , onda je osni presek

jednakostranični trougao i važi da je : $2r=s$

Znajte da kupa može nastati i obrtanjem pravouglog trougla oko jedne od svojih kateta:



Obrtanje oko katete b



Obrtanje oko katete a

333. Полупречник основе праве купе је 6 cm, а висина купе је 11 cm. Израчунати запремину те купе.

$r = 6cm$

$H = 11cm.$

$V = ?$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} 6^2 \pi \cdot 11$$

$$V = \frac{1}{3} 36\pi \cdot 11$$ skratimo 36 i 3 sa 3

$$V = 12\pi \cdot 11$$

$$V = 132\pi cm^3$$

334. Израчунати површину праве купе чија је запремина $3\pi\ \mathrm{cm}^3$, а површина њене основе $3\pi\ \mathrm{cm}^2$.

$V = 3\pi cm^3$

$B = 3\pi cm^2$

$P = ?$

Najpre tražimo visinu H primenjujući početnu formulu za zapreminu:

$V = \frac{1}{3} BH$

$3\pi = \frac{1}{3} 3\pi \cdot H$ ovde skratimo trojke i π

$3 = H$

$H = 3cm$

Iz površine baze ćemo lako naći poluprečnik

B= $r^2\pi$

$3\pi = r^2\pi$

$r^2 = 3$

$r = \sqrt{3}cm$

Primenom Pitagorine teoreme ćemo naći izvodnicu s:

$s^2 = H^2 + r^2$

$s^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2$

$s^2 = 9 + 3$

$s^2 = 12$

$s = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}cm$

I konačno, površina je:

$P = r\pi(r+s)$

$P = \sqrt{3}\pi(\sqrt{3}+2\sqrt{3})$

$P = \sqrt{3}\pi \cdot 3\sqrt{3}$

$P = 3\pi\sqrt{3}^2$

$P = 3\pi \cdot 3$

$P = 9\pi cm^2$

335. Запремина праве купе је $800\pi\ cm^3$. Израчунати површину купе ако су пречник основе и висина у размери 5 : 6.

$V = 800\pi cm^3$

$2r : H = 5:6$ (prečnik osnove i visina su u razmeri 5:6)

$P = ?$

$12r = 5H$ odavde izrazimo H

$H = \frac{12r}{5}$

Sada ovo menjamo u formulu za zapreminu:

$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$

$800\pi = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot \frac{12r}{5}$ pokratimo...

$800 = \frac{4r^3}{5}$

$4r^3 = 4000 \to r^3 = 1000 \to r^3 = 10^3 \to r = 10cm$

Dalje nam treba izvodnica s, koju ćemo naći preko Pitagorine teoreme:

$s^2 = r^2 + H^2$

$s^2 = 10^2 + 24^2$

$s^2 = 100 + 576$

$s^2 = 676$

$s = \sqrt{676}$

$s = 26cm$

Konačno, površina je:

$$P = r\pi(r+s)$$
$$P = 10\pi(10+26)$$
$$P = 10\pi \cdot 36$$
$$P = 360\pi cm^2$$

336. Обим основе купе је 6π cm, а висина купе је 4 cm. Израчунати:

А) изводницу;

Б) површину;

В) запремину купе.

$O = 6rcm$

$H = 4cm$

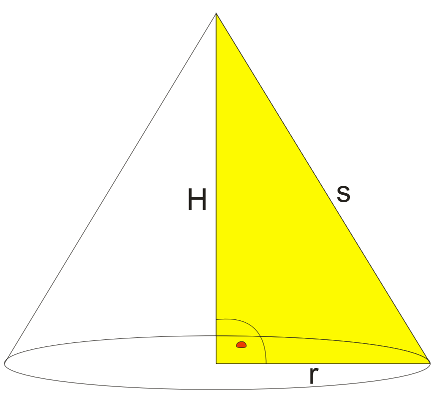
$A)\quad s = ?$

$B)\quad P = ?$

$V)\quad V = ?$

Iz obima osnove ćemo naći poluprečnik osnove r

$$O = 2r\pi$$
$$6\pi = 2r\pi$$
$$2r = 6$$
$$r = 3cm$$



Primenom Pitagorine teoreme dobijamo izvodnicu:

$$s^2 = r^2 + H^2$$
$$s^2 = 3^2 + 4^2$$
$$s^2 = 9 + 16$$
$$s^2 = 25$$
$$s = \sqrt{25}$$
$$s = 5cm$$

Dalje nije teško naći površinu i zapreminu:

$P = r\pi(r+s)$
$P = 3\pi(3+5)$
$P = 3\pi \cdot 8$
$P = 24\pi cm^2$

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$
$V = \frac{1}{3} 3^2 \pi \cdot 4$
$V = \frac{1}{3} 9\pi \cdot 4$
$V = 12\pi cm^3$

337. Површина праве купе је 90π cm^2, а површина основе је 25π cm^2. Израчунати запремину купе.

$P = 90\pi cm^2$
$B = 25\pi cm^2$
$V = ?$

Krećemo od opšte formule za površinu:

$$P = B + M$$
$$90\pi = 25\pi + M$$
$$M = 90\pi - 25\pi$$
$$M = 65\pi cm^2$$

Iz baze ćemo lako naći poluprečnik r

$B = r^2\pi$
$25\pi = r^2\pi$
$r^2 = 25$
$r = \sqrt{25}$
$r = 5cm$

Vratimo se u omotač da nađemo izvodnicu s

$M = sr\pi$

$65\pi = s \cdot 5\pi$ naravno, kao i uvek, skratimo π

$65 = s \cdot 5$

$s = \frac{65}{5}$

$s = 13cm$

Sad upotrebimo Pitagorinu teoremu

$s^2 = r^2 + H^2$

$13^2 = 5^2 + H^2$

$169 = 25 + H^2$

$H^2 = 169 - 25$

$H^2 = 144$

$H = \sqrt{144}$

$H = 12cm$

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$

$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \pi \cdot 12$

$V = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 12$ skratimo 12 i 3 sa 3

V=100πcm^3

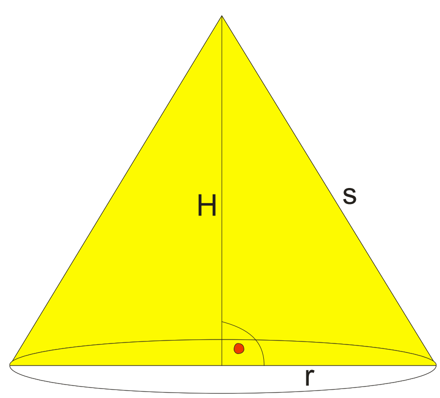
338. Ако је дужина пречника праве купе 18 cm, а површина купе је 216π cm^2, израчунати површину осног пресека купе.

$2r = 18cm$

$P = 216\pi cm^2$

$P_{op} = ?$

Kako se beše izračunava površina osnog preseka? Pogledajmo sliku:



osni presek

$$P_{op} = \frac{2rH}{2} \quad \text{to jest :} \quad P_{op} = r \cdot H$$

Iz 2r = 18 ,jasno je da je r = 9cm

Nadjimo visinu:

$P = r\pi(r+s)$
$216\pi = 9\pi(9+s)$ skratimo π
$216 = 9(9+s)$
$9+s = \frac{216}{9}$
$9+s = 24$
$s = 24-9$
$s = 15cm$

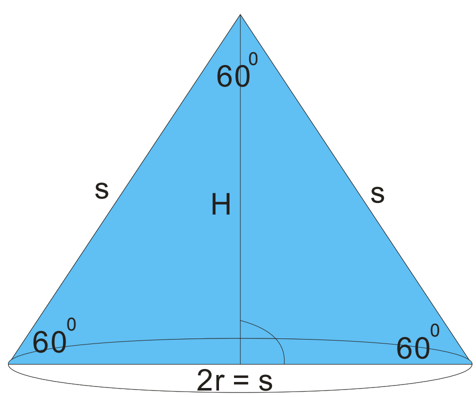
$s^2 = H^2 + r^2$
$15^2 = H^2 + 9^2$
$225 = H^2 + 81$
$H^2 = 225-81$
$H^2 = 144$
$H = \sqrt{144}$
$H = 12cm$

Sad je lako:

$P_{op} = r \cdot H$
$P_{op} = 9 \cdot 12$
$P_{op} = 108cm^2$

339. Израчунати површину праве купе ако се зна да је њен осни пресек једнакостранични троугао површине $16\sqrt{3}$ cm^2.

$P_{op} = 16\sqrt{3}cm^2$
$P = ?$



osni presek

Osni presek je jednakostranični trougao — to nam govori da je 2r = s

Za površinu osnog preseka ćemo upotrebiti formulu za površinu jednakostraničnog trougla:

$$P_{\triangle} = \frac{a_{\triangle}^{2}\sqrt{3}}{4}$$

$$16\sqrt{3} = \frac{s^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{skratimo } \sqrt{3}$$

$$16 = \frac{s^2}{4}$$

$$s^2 = 16 \cdot 4$$

$$s^2 = 64$$

$$s = \sqrt{64}$$

$$s = 8cm$$

Kako je 2r = s , onda je 2r = 8, pa je jasno: r = 4cm

$$P = r\pi(r+s)$$

$$P = 4\pi(4+8)$$

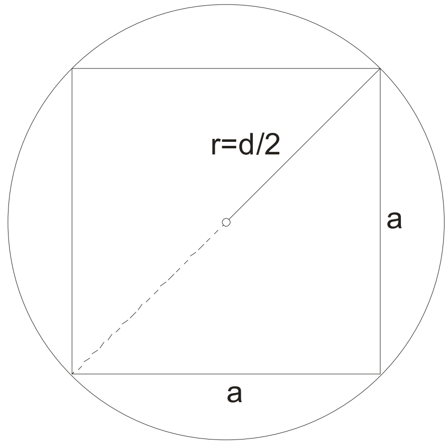
$$P = 4\pi \cdot 12$$

$$P = 48\pi cm^2$$

340. Основа пирамиде је квадрат странице $6\sqrt{2}$ cm, а основа купе је круг описан око тог квадрата. Ако су им висине 8 cm, одредити однос њихових запремина.

Uočimo par činjenica:

- visine su im iste
- dužina osnovne ivice piramide je : $a = 6\sqrt{2}$
- da nađemo poluprečnik osnove kupe...tu će nam pomoći " pogled odozdo":



Uočavamo da je poluprečnik osnove kupe ustvari polovina dijagonale kvadrata!

Dakle: $r=\frac{d}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}=\frac{6\cdot 2}{2}=6cm$

Izračunajmo sada odnos zapremina:

$$
\begin{aligned}
V_{kupa}:V_{piramida} &= \frac{r^2\pi H}{3}:\frac{a^2H}{3} \quad \text{(ovde kratimo H, jer su im iste , i trojke)}\\
&= r^2\pi : a^2\\
&= (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 \ \pi : a^2\\
&= \frac{a^2\cdot 2}{4}\pi : a^2 \quad \text{(pokratimo a i 2 i 4)}\\
&= \frac{\pi}{2}:1 \quad \text{(proširimo sa 2)}\\
&= \pi : 2
\end{aligned}
$$

Šta primećujemo?

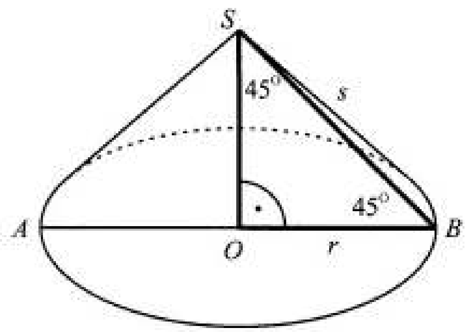
Pa podatak da je poluprečnik osnove kupe $r=\frac{d}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}=\frac{6\cdot 2}{2}=6cm$ nam nije ni trebao i podatak da je

$a=6\sqrt{2}$ je takođe nepotreban! **Dovoljno je znati da je** : $r=\frac{d}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

341. Обим основе праве купе је 36π cm. Изводница купе нагнута је према равни основе под углом од 45°. Израчунати:

А) површину купе;

Б) запремину купе.

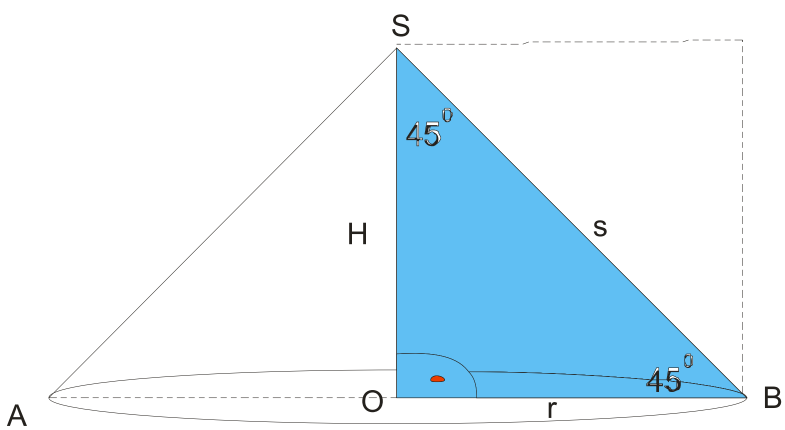


$O = 36\pi cm$

$A)\ P = ?$

$B)\ V = ?$

Uočimo najpre na slici trougao BOS.



H=r

On je očigledno jednakokrako pravougli trougao! To nam govori da je H = r. Izvodnica s je ustvari dijagonala kvadrata čija je stranica r.

Iz obima osnove ćemo naći poluprečnik r , onda istovremeno imamo i H, a izvodnica s ćemo kao dijagonalu kvadrata naći kao : $s = r\sqrt{2}$

$O = 2r\pi$

$36\pi = 2r\pi$

$36 = 2r$

$r = 18cm \rightarrow H = 18cm \rightarrow s = 18\sqrt{2}cm$

$P = r\pi(r+s)$

$P = 18\pi(18+18\sqrt{2})$ ovde , ako se setite, izvučite 18 kao zajednički ispred zagrade)

$P = 18\pi \cdot 18(1+1\sqrt{2})$

$P = 324\pi(1+\sqrt{2})cm^2$

$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$

$V = \frac{1}{3}18^2\pi \cdot 18$

$V = \frac{1}{3}324 \cdot \pi \cdot 18$

$V = 1944\pi cm^3$

342. Гомила песка има облик купе чији је обим основе 8π m, а висина 3 m. Колико кубних метара песка има у тој гомили?

$O = 8\pi m$

$H = 3m$

$V = ?$

$O = 2r\pi$

$8\pi = 2r\pi$

$2r = 8$

$r = 4m$

$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$

$V = \frac{1}{3}4^2\pi \cdot 3$

$V = 16\pi m^3$