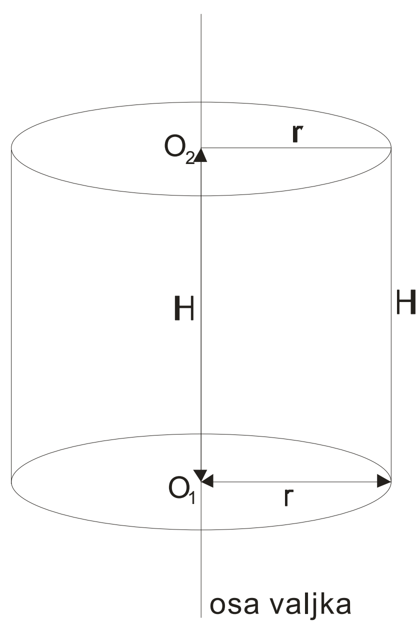
VALJAK

Valjak je geometrijsko telo ograničeno sa dva kruga u paralelnim ravnima i delom cilindrične površi čije su izvodnice normalne na ravan tih krugova.

Osa valjka je prava koja prolazi kroz centre baza.

Naravno kao i do sada oznake su:

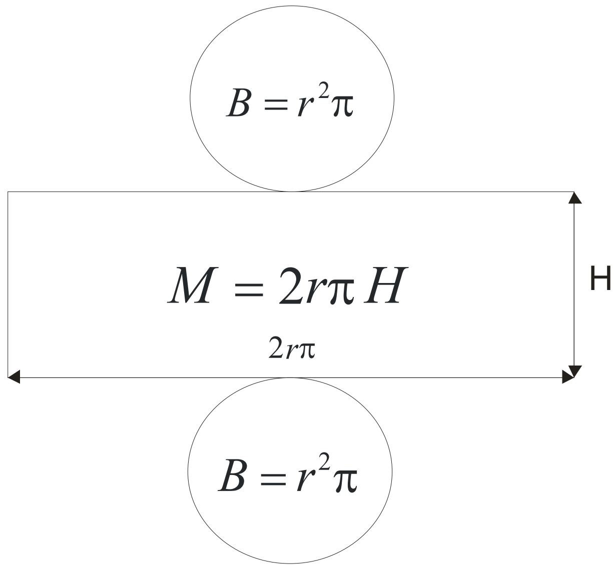
- **P je površina valjka**
- **V je zapremina valjka**
- **B je površina baze**
- **M je površina omotača**
- **H je visina valjka**
- **r je poluprečnik osnove (baze), onda je 2r prečnik**



Početne formule za površinu i zapreminu valjka iste su kao i formule za P i V prizme:

$$P = 2B + M \qquad \text{i} \qquad V = B \cdot H$$

Pre nego li sklopimo formule za P i V pogledajmo mrežu valjka:



Baze su očigledno krugovi čija je površina :

$B = r^2\pi$.

Omotač je pravougaonik čije su stranice visina H i obim kruga $O = 2r\pi$ **, pa je površina omotača jednaka**

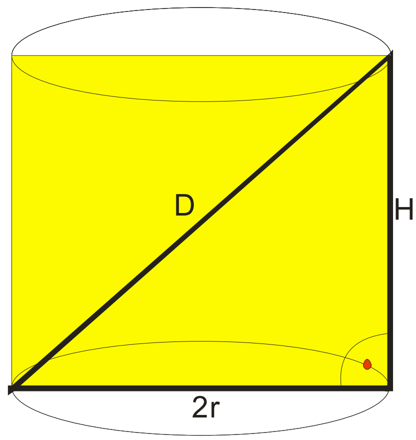
$M = 2r\pi H$

$$P = 2B + M \qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H \qquad V = r^2\pi H$$

$$P = 2r\pi(r + H)$$

Pogledajmo sada kako izgleda osni presek valjka:



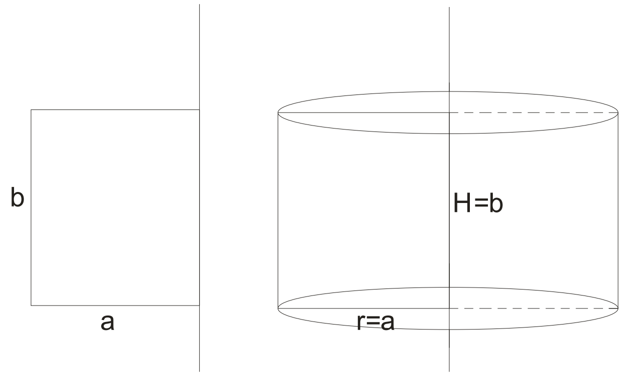
osni presek

Ovde primenjujemo Pitagorinu teoremu: $D^2 = (2r)^2 + H^2$

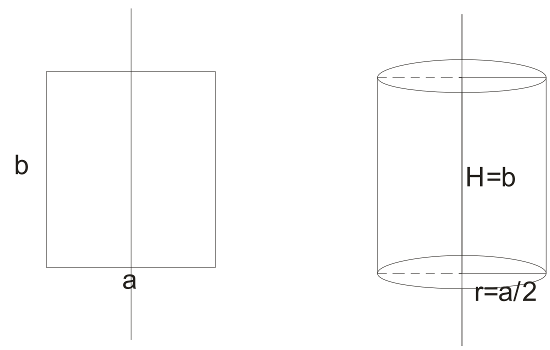
Površina osnog preseka je $P_{op} = 2rH$

Ako u tekstu zadatka kaže da je valjak **RAVNOSTRAN**, to znači da mu je osni presek kvadrat i da je $H = 2r$

Napomenimo još da valjak može nastati obrtanjem kvadrata ili pravougaonika oko jedne stranice ili simetrale stranice.



osa rotacije(stranica)



osa rotacije (simetrala stranice)

1) Izračunati zapreminu pravog valjka ako je data površina $P = 324\pi cm^3$ i odnos visine prema poluprečniku $H : r = 7 : 2$.
Rešenje:

$$P = 324\pi cm^3$$
$$H : r = 7 : 2$$
$$V = ?$$

Kako imamo datu razmeru, upotrebićemo "trik sa k" $H : r = 7 : 2 \Rightarrow \begin{cases} H = 7k \\ r = 2k \end{cases}$

Obrazac za površinu je:

$$P = 2r\pi(r + H)$$
$$324\cancel{\pi} = 2 \cdot 2k \cdot \cancel{\pi}(2k + 7k)$$
$$324 = 4k \cdot 9k$$
$$324 = 36k^2$$
$$k^2 = 9$$
$$k = 3$$

$$H = 7 \cdot 3 = 21cm$$
$$r = 2 \cdot 3 = 6cm$$
$$V = r^2\pi H$$
$$V = 6^2 \cdot \pi \cdot 21$$
$$V = 756\pi cm^3$$

2) Površina pravog valjka je 84 πcm^2, a visina mu je za 5cm veća od prečnika osnove. Izračunati zapreminu valjka.

Rešenje:

$$P = 84\pi cm^2$$
$$H = 2r + 5$$
$$V = ?$$

$$P = 2r\pi(r + H)$$
$$84\pi = 2r\pi(r + 2r + 5)$$
$$84 = 2r(3r + 5)$$
$$84 = 6r^2 + 10r$$
$$6r^2 + 10r - 84 = 0$$
$$3r^2 + 5r - 42$$
$$r_{1,2} = \frac{-5 \pm 23}{6}$$
$$r_1 = \frac{-5 + 23}{6} = \frac{18}{6} = 3$$
$$r_2 = \frac{-5 - 23}{6} \rightarrow Nemoguće$$

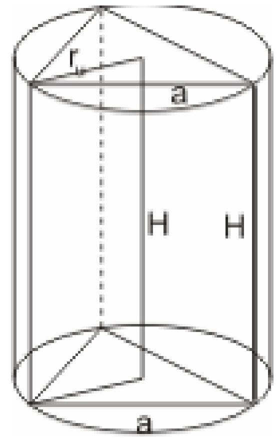
Dakle $r = 3cm$

$$H = 2r + 5$$
$$H = 2 \cdot 3 + 5$$
$$H = 11cm$$

$$V = r^2\pi H$$
$$V = 3^2 \pi \cdot 11$$
$$V = 99\pi cm^3$$

3) Od drvenog valjka poluprečnika osnove $r = 9cm$, visine $H = 12cm$ istesana je najveća moguća pravilna trostrana prizma. Kolika je zapremina odpadaka?

Rešenje:



→ Najveća prizma je ona koja je upisana u valjak
→ Visine prizme i valjka su jednake
→ Zapreminu odpadaka ćemo dobiti kad od zapremine valjka oduzmemo zapreminu prizme!

$r = 9cm$

$H = 12cm$

$V_{OD} = V_v - V_P$

Nadjimo najpre stranicu prizme.

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = r_o$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 9$$

$$a\sqrt{3} = 27$$

$$a = \frac{27}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{27}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{27\sqrt{3}}{3}$$

$$a = 9\sqrt{3}cm$$

$$V_{OD} = V_v - V_P$$

$$V_{OD} = r^2\pi H - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$V_{OD} = H\left(r^2\pi - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$V_{OD} = 12\left(9^2\pi - \frac{\left(9\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$V_{OD} = 12\left(81\pi - \frac{243\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$V_{OD} = \cancel{12}\left(\frac{324\pi - 243\sqrt{3}}{\cancel{4}}\right)$$

$$V_{OD} = 3 \cdot 81\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

$$V_{OD} = 243\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)cm^3$$

4) Izračunati površinu šupljeg valjka čija je visina $H = 25cm$, poluprečnik spoljašnjeg omotača $R = 15cm$, a unutrašnjeg je $r = 6cm$

Rešenje:

$H = 25cm$

$R = 15cm$

$r = 6cm$

$P = ?$

Razmišljamo:

→ Površina šupljeg valjka se sastoji iz omotača većeg valjka, omotača manjeg valjka i dve baze koje čine kružni prsteni.

Dakle: $P = M_1 + M_2 + 2B$

$M_1 \rightarrow$ Omotač većeg valjka

$M_1 = 2R\pi H = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot 25 = 750\pi cm^2$

$M_2 \rightarrow$ Omotač manjeg valjka

$M_2 = 2r\pi H = 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 25 = 300\pi cm^2$

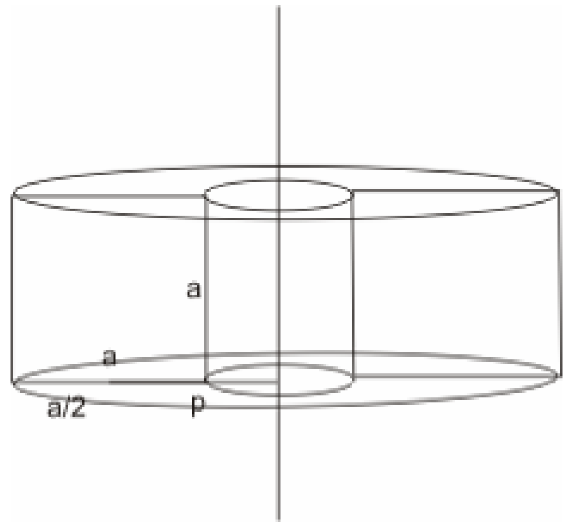
$B = \left(R^2 - r^2\right)\pi = \left(15^2 - 6^2\right)\pi = 189\pi cm^2$

$P = 750\pi + 300\pi + 2 \cdot 189\pi$

$\boxed{P = 1428\pi cm^2}$

5) Kvadrat stranice a rotira oko ose koja je od centra kvadrata udaljena za $p\left(p > \frac{a}{2}\right)$. Odrediti zapreminu obrtnog tela ako je osa paralelna stranici kvadrata i leži u njegovoj ravni.

Rešenje:



Razmišljamo:

→ Na ovaj način smo ustvari dobili šuplji valjak.

→ Poluprečnik osnove većeg valjka je $R = p + \frac{a}{2}$

→ Poluprečnik osnove manjeg valjka je $r = p - \frac{a}{2}$

→ Visine oba valjka su iste ako i stranica kvadrata, tj. $H = a$

→ Zapreminu šupljeg valjka ćemo dobiti kad od zapremine većeg oduzmemo zapreminu manjeg valjka!

$$V = V_1 - V_2$$
$$V = R^2\pi H - r^2\pi H$$
$$V = \pi H\left(R^2 - r^2\right)$$
$$V = \pi H\left[\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(p - \frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$V = \pi H\left[\cancel{p^2} + pa + \cancel{\frac{a^2}{4}} - \cancel{p^2} + pa - \cancel{\frac{a^2}{4}}\right]$$
$$V = \pi H \cdot 2pa$$
$$V = 2paH\pi$$
$$V = 2pa \cdot a\pi$$
$$V = 2a^2 p\pi$$

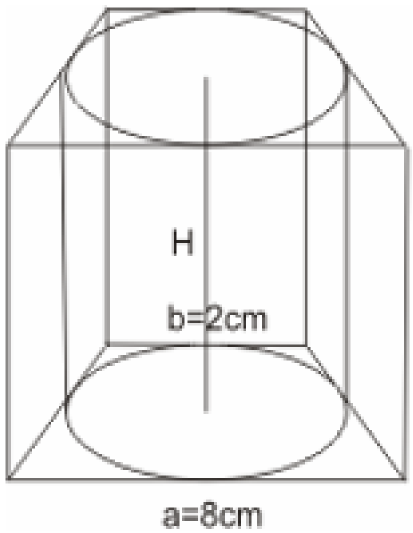
Napomena:

Kao i u prethodnom primeru površina šupljeg valjka se sastoji iz omotača većeg valjka, omotača manjeg valjka i dve baze koje čine kružni prsteni.

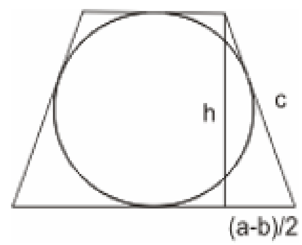
$$P = M_1 + M_2 + 2B$$

6) Osnova prizme je jednakokraki trapez osnovica 8cm i 2cm. U trapez je upisan valjak. Izračunati razmeru zapremine valjka i zapremine prizme ako je njegova visina jednaka kraku trapeza.

Rešenje:



$$a = 8cm$$
$$b = 2cm$$
$$H = C$$
$$V_V : V_P = ?$$



Ako pogledamo bazu vidimo da je trapez tangentni četvorougao (može da se upiše krug) pa je:

$$a + b = 2c$$
$$8 + 2 = 2c$$
$$10 = 2c$$
$$c = 5cm \Rightarrow H = 5cm$$

Primenom Pitagorine teoreme na trapez:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$h^2 = 5^2 - \left(\frac{8-2}{2}\right)^2$$
$$h^2 = 25 - 9$$
$$h^2 = 16$$
$$h = 4cm$$

Površina kruga je:

$P = r^2\pi$ gde je

$$r = \frac{h}{2} = 2cm$$
$$P = 4\pi cm^2$$

Površina trapeza je:

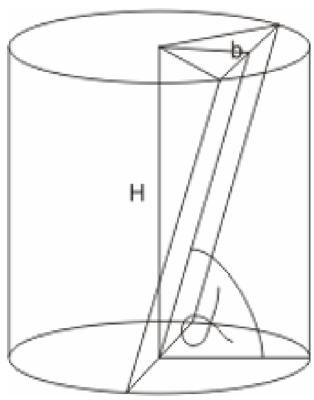
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{8+2}{2} \cdot 4$$
$$P = 20cm^2$$

$$V_V : V_P = B_V H : B_P H$$
$$= B_V : B_P$$
$$= 20 : 4\pi$$
$$= 5 : \pi$$
$$\boxed{V_V : V_P = 5 : \pi}$$

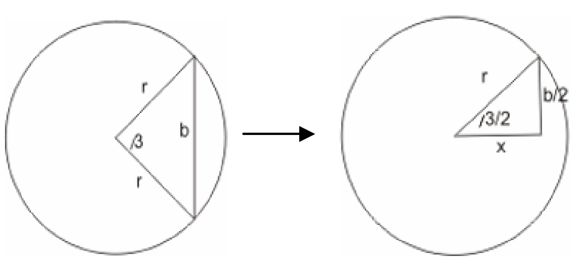
7) Ravan prolazi kroz centar donje osnove kružnog valjka i nagnuta je prema ravni osnove pod uglom α. Ta ravan seče gornju osnovu po tetivi *b*, kojoj odgovara centralni ugao β. Izračunati zapreminu valjka.

Rešenje:

Kod ovog zadatka slika je neophodna i sa nje ćemo uočiti zavisnost izmedju elemenata. Pošto se zapremina valjka računa $V = r^2\pi H$, naš "posao" je da r i H izrazimo preko datih elemenata α, β i b.



Proučimo najpre gornju bazu!!



Onda je:

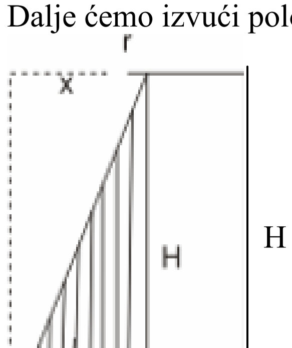
$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{r}$$

$$\boxed{r = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}}$$

i $tg\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\frac{b}{2}}{x}$

$$\boxed{x = \frac{b}{2tg\frac{\beta}{2}}}$$

Dalje ćemo izvući polovinu osnog preseka (onu desnu, naravno)



→ odavde je $tg\alpha = \dfrac{H}{x} \Rightarrow H = xtg\alpha = \dfrac{b}{2tg\frac{\beta}{2}} \cdot tg\alpha \to \boxed{H = \dfrac{btg\alpha}{2tg\frac{\beta}{2}}}$

$$V = r^2\pi H$$

$$V = \left(\frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2 \pi \cdot \frac{btg\alpha}{2tg\frac{\beta}{2}}$$

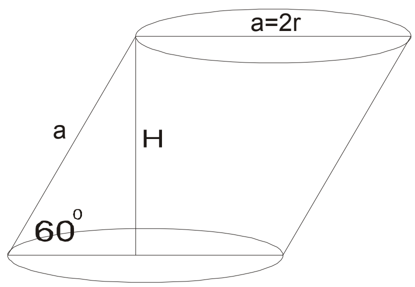
Konačno, zapremina je:

$$V = \frac{b^2}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}\pi \cdot \frac{btg\alpha}{2tg\frac{\beta}{2}}$$

$$V = \frac{b^3\pi tg\alpha}{8\sin^2\frac{\beta}{2}tg\frac{\beta}{2}}$$

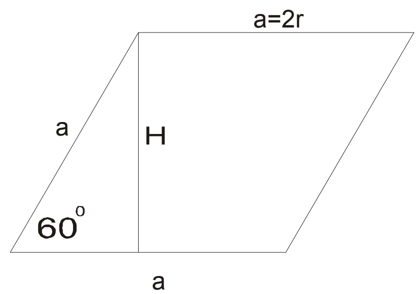
8) Zapremina kosog valjka kod koga izvodnica zaklapa ugao $\alpha = 60^o$ sa ravni osnove je $V = 8\pi\sqrt{3}$. Odrediti poluprečnik osnove ako se zna da je osni presek romb.

Rešenje:



$$\frac{V = 8\pi\sqrt{3}}{r = ?}$$

Izvucimo osni presek “na stranu’’



Odavde je:

$$\sin 60^o = \frac{H}{a}$$

$H = a\sin 60^o \rightarrow$ I pošto je $a = 2r$ onda je $H = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$H = r\sqrt{3}$$

Upakujemo ovde dve dobijene jednakosti:

$$V = r^2\pi H$$
$$8\cancel{\pi}\sqrt{3} = r^2\cancel{\pi}H$$
$$r^2 H = 8\sqrt{3}$$

$$r^2 H = 8\sqrt{3}$$
$$r^2 \cdot r\cancel{\sqrt{3}} = 8\cancel{\sqrt{3}}$$
$$r^3 = 8$$
$$r^3 = 2^3$$
$$\boxed{r = 2}$$