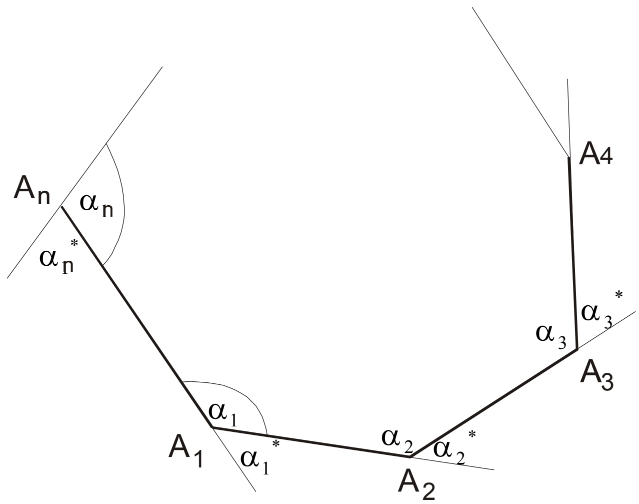
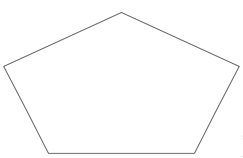
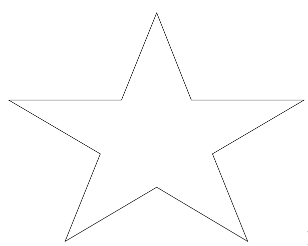
MNOGOUGAO

Mnogougao je deo ravni ograničen zatvorenom, izlomljenom linijom , uključujući i tačke sa te linije.



Ako duž koja spaja bilo koje dve tačke na izlomljenoj liniji ne seče nijednu stranicu mnogougla, onda je to KONVEKSAN mnogougao, a ako seče ' nekonveksan mnogougao.


konveksan mnogougao


nekonveksan mnogougao

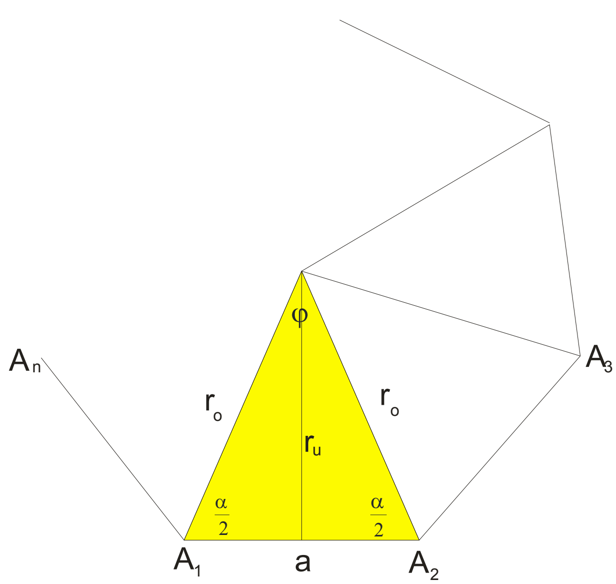
VAŽI :

1) n je broj stranica = broj unutrašnjih uglova = broj temena
2) Zbir svih unutrašnjih uglova sa računa po formuli $S_n = (n-2)\cdot 180^o$
3) Zbir svih spoljašnjih uglova je 360^o
4) Iz svakog temena mnogougla mogu se povući $d_n = n-3$ dijagonala
5) Ukupan broj dijagonala je $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$

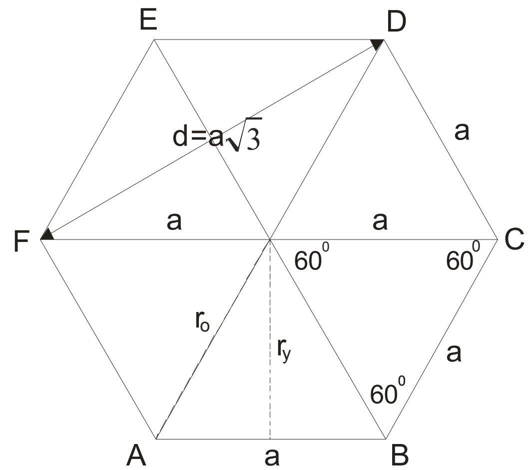
PRAVILAN MNOGOUGAO je mnogougao koji ima međusobno podudarne stranice i unutrašnje uglove.

Za pravilne mnogouglove sa n stranica važi:

- On ima n osa simetrije
- Ako je broj stranica paran on je ujedno centralno simetričan
- Oko svakog pravilnog mnogougla se može opisati kružnica čiji se centri poklapaju
- Može se podeliti na n karakterističnih jednakokrakih trouglova čija su dva temena bilo koja dva susedna temena mnogougla a treće je u centru opisane tj upisane kružnice.
- Zbir svih unutrašnjih uglova sa računa po formuli $S_n = (n-2)\cdot 180^o$
- Jedan unutrašnji ugao je onda $\alpha = \frac{S_n}{n}$
- Jedan spoljašnji ugao je $\alpha_1 = \frac{360^o}{n}$ $(\alpha + \alpha_1 = 180^o)$
- Zbir svih spoljašnjih uglova je 360^o
- Iz svakog temena mnogougla mogu se povući $d_n = n-3$ dijagonala
- Ukupan broj dijagonala je $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$
- Ako je dužina stranice a onda je obim mnogougla O=na
- Površina se računa po formuli $P = n\frac{ah}{2}$, gde je h visina karakterističnog trougla
- Centralni ugao je $\varphi = \frac{1}{n}360^o$



ŠESTOUGAO



Pravilni šestougao se sastoji od 6 jednakostraničnih trouglova.

$$O = 6a \quad \text{obim}$$

$$P = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{površina}$$

$$d = a\sqrt{3} \quad \text{mala dijagonala}$$

$$D = 2a \quad \text{velika dijagonala}$$

$$r_o = a \quad \text{poluprečnik opisane kružnice}$$

$$r_y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{poluprečnik upisane kružnice}$$

Evo nekoliko primera za obnavljanje gradiva:

225. Одредити број дијагонала D_7 и збир унутрашњих углова S_7 било ког конвексног седмоугла.

Pošto je u pitanju sedmougao, onda je n = 7.

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$
$$D_7 = \frac{7 \cdot (7-3)}{2}$$
$$D_7 = \frac{7 \cdot 4}{2}$$
$$D_7 = 14$$

$$S_n = (n-2) \cdot 180^0$$
$$S_7 = (7-2) \cdot 180^0$$
$$S_7 = 5 \cdot 180^0$$
$$S_7 = 900^0$$

226. Број дијагонала неког многоугла је три пута већи од броја његових темена. Колико страница има тај многоугао?

$D_n = 3n$ (jer je broj dijagonala tri puta veći od broja stranica)

n=?

$$D_n = 3n$$
$$\frac{n(n-3)}{2} = 3n \quad \text{(pokratimo n i n)}$$
$$\frac{(n-3)}{2} = 3$$
$$n-3 = 3 \cdot 2$$
$$n-3 = 6$$
$$n = 3+6$$
$$n = 9$$

227. Збир углова конвексног многоугла је 1620°. Одредити број његових:

А) темена;

Б) дијагонала.

$S_n = 1620^0$

$A) \quad n = ?$

$B) \quad D_n = ?$

$S_n = (n-2) \cdot 180^0$

$1620^0 = (n-2) \cdot 180^0$

$n-2 = \dfrac{1620^0}{180^0}$

$n-2 = 9$

$n = 9+2$

$n = 11$

$D_n = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$

$D_{11} = \dfrac{11 \cdot (11-3)}{2}$

$D_{11} = \dfrac{11 \cdot 8}{2}$

$D_{11} = 44$

228. Сваки од углова многоугла је $\alpha = 160°$. Колико тај многоугао има:

А) страница;

Б) дијагонала?

$\alpha = 160^0$

$A) \quad n = ?$

$B) \quad D_n = ?$

Iskoristićemo da je zbir unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla 180 stepeni i naći spoljašnji ugao, a onda ćemo preko spoljašnjeg ugla izračunati n.

$\alpha + \alpha_1 = 180^0$

$160^0 + \alpha_1 = 180^0$

$\alpha_1 = 180^0 - 160^0$

$\alpha_1 = 20^0$

$n = \dfrac{360^0}{\alpha_1} = \dfrac{360^0}{20^0} = 18$

Dalje nije teško izračunati broj dijagonala:

$D_n = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$

$D_{18} = \dfrac{18 \cdot (18-3)}{2}$

$D_{18} = \dfrac{18 \cdot 15}{2}$

$D_{18} = 135$

229. Број дијагонала неког многоугла је пет пута већи од броја његових страница. Колики је збир његових углова?

$D_n = 5n$ (broj dijagonala je pet puta veći od broja temena)

$D_n = 5n$

$\dfrac{n(n-3)}{2} = 5n$ (pokratimo n i n)

$\dfrac{(n-3)}{2} = 5$

$n - 3 = 5 \cdot 2$

$n - 3 = 10$

$n = 3 + 10$

$n = 13$

Sada računamo zbir njegovih unutrašnjih uglova:

$S_n = (n-2) \cdot 180^0$

$S_{13} = (13-2) \cdot 180^0$

$S_{13} = 11 \cdot 180^0$

$S_{13} = 1980^0$

230. Да ли постоји многоугао у коме је сваки од углова 110°? Образложити одговор.

$\alpha = 110^0$
$n = ?$

Pokušaćemo da nađemo broj stranica n, i tako utvrditi da li takav mnogougao postoji!

$\alpha + \alpha_1 = 180^0$
$110^0 + \alpha_1 = 180^0$
$\alpha_1 = 180^0 - 110^0$
$\alpha_1 = 70^0$

$$n = \frac{360^0}{\alpha_1} = \frac{360^0}{70^0} = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$$

Dakle, takav mnogougao **ne postoji!**

231. Колико страница има правилни многоугао чији је централни угао 12°?

$\varphi = 12^0$
$n = ?$

Znamo da je centralni ugao jednak spoljašnjem uglu. Dakle: $\varphi = \alpha_1$

$$n = \frac{360^0}{\alpha_1} = \frac{360^0}{12^0} = 30$$

Dakle , taj mnogougao ima 30 stranica.

232. Централни угао правилног многоугла је 15°. Одредити унутрашњи угао тог многоугла.

$\varphi = 15^0$
$\alpha = ?$

Centralni ugao jednak je spoljašnjem uglu. To jest: $\varphi = \alpha_1$

$\alpha + \alpha_1 = 180^0$
$\alpha + 15^0 = 180^0$
$\alpha = 180^0 - 15^0$
$\alpha = 165^0$

233. Колико страница има правилни многоугао у коме је централни угао пет пута мањи од унутрашњег угла тог многоугла?

$\alpha = 5 \cdot \varphi$ (centralni ugao je 5 puta manji od unutrašnjeg)

$n = ?$

Centralni ugao jednak je spoljašnjem uglu: $\varphi = \alpha_1$

Datu jednakost možemo zapisati i kao: $\alpha = 5 \cdot \alpha_1$

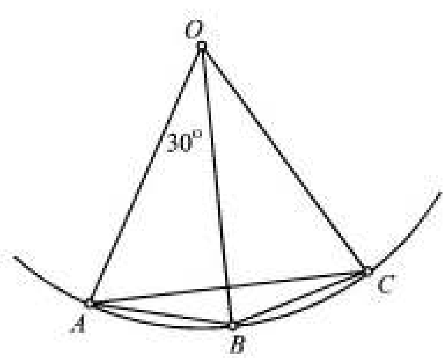
Dalje ćemo oformiti sistem jednačina:

$$\alpha = 5\alpha_1$$
$$\alpha + \alpha_1 = 180^0$$
$$5\alpha_1 + \alpha_1 = 180^0$$
$$6\alpha_1 = 180^0$$
$$\alpha_1 = \frac{180^0}{6}$$
$$\alpha_1 = 30^0$$

I konačno, broj stranica traženog mnogougla je:

$$n = \frac{360^0}{\alpha_1} = \frac{360^0}{30^0} = 12$$

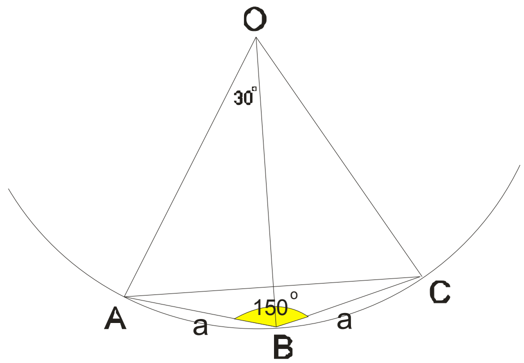
234. Тачке *A*, *B*, *C* су три узастопна темена правилног многоугла чији је централни угао α = 30°. Одредити угао *ACB*.



Prvo jedno objašnjenje: mi smo centralni ugao obeležavali sa φ a oni ga daju sa α, da vas to ne zbuni.

Znamo da je centralni ugao jednak spoljašnjem, a to ćemo iskoristiti da nađemo unutrašnji ugao!

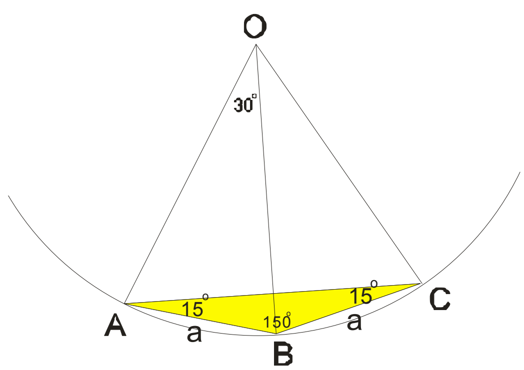
$\alpha_{unutr.} = 180^0 - 30^0 = 150^0$



Uočimo dalje trougao ABC. On je jednakokraki , a znamo da je jedan ugao 150^0.

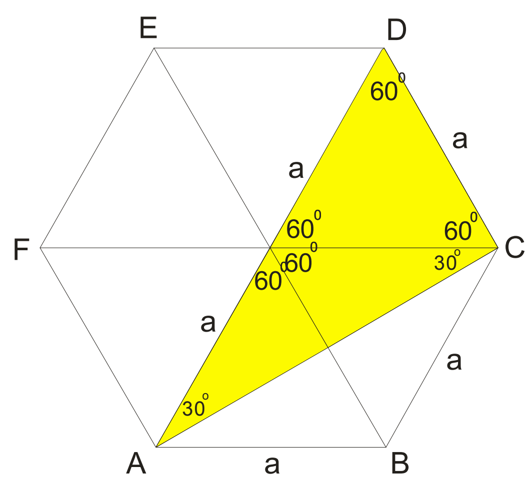
Kako je zbir uglova u svakom trouglu 180^0, naći ćemo traženi ugao:

$$\measuredangle ACB = \frac{180^0 - 150^0}{2} = \frac{30^0}{2} = 15^0$$



235. Ако је *ABCDEF* правилни шестоугао, одредити углове троугла *ACD*.

Nacrtajmo sliku i ona će nam sve “ispričati":



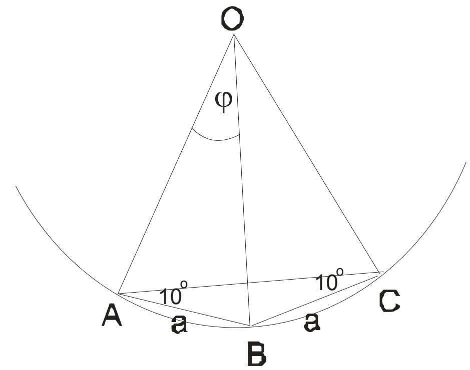
Znamo da se šestougao sastoji iz 6 jednakostraničnih trouglova. Uglovi u svakom od tih trouglova su po 60^0.

Ugao CAD je polovina od 60^0, dakle 30^0. Takav je i ugao ACF$=30^0$

Jasno je da su uglovi trougla ACD: 30^0, 60^0 i $60^0 + 30^0 = 90^0$

236. Тачке A, B и C су три узастопна темена правилног многоугла. Ако је $\angle ACB = 10^\circ$, одредити централни угао и број страница тог многоугла.

Ovaj zadatak je vrlo sličan 234. zadatku al ovde imamo ugao ACB a trebamo naći centralni ugao!



Trougao ABC je jednakokraki, jer su dve njegove stranice istovremeno i stranice mnogougla. Dakle i ugao

BAC je 20^0.

Onda je unutrašnji ugao mnogougla : $\measuredangle ABC = 180^0 - (10^0 + 10^0) = 180^0 - 20^0 = 160^0$

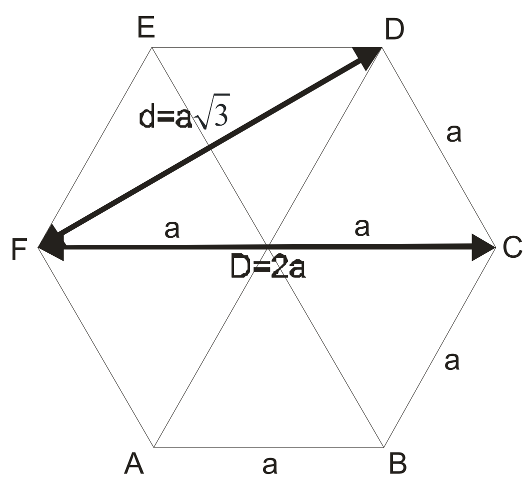
Spoljašnji ugao (koji je jednak traženom centralnom) je :

$$\varphi = 180^0 - 160^0 = 20^0$$

Broj stranica n ćemo naći iz formule:

$$n = \frac{360^0}{\varphi} = \frac{360^0}{20^0} = 18$$

237. Дужа дијагонала правилног шестоугла је $4\sqrt{3}$ cm. Одредити његову краћу дијагоналу.



$D = 4\sqrt{3}cm$

$d = ?$

$D = 2a$

$4\sqrt{3} = 2a$

$a = \frac{4\sqrt{3}}{2}$

$a = 2\sqrt{3}cm$

$d = a\sqrt{3}$

$d = 2\sqrt{3}\sqrt{3}$

$d = 2 \cdot 3$

$\boxed{d = 6cm}$

238. Краћа дијагонала правилног шестоугла је $2\sqrt{3}$ cm. Одредити страницу и површину тог шестоугла.

$d = 2\sqrt{3}$

$a = ?$

$P = ?$

$d = 2\sqrt{3}$

$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$a = 2cm$

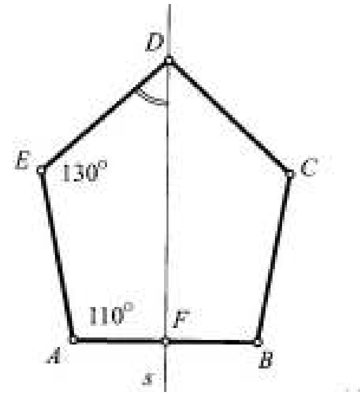
$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

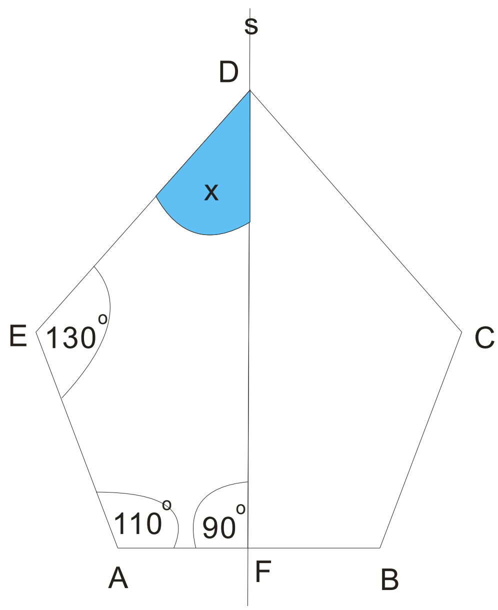
$P = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4}$

$P = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4}$

$P = 6\sqrt{3}cm^2$

239. На приложеном цртежу, права $s = DF$ је оса симетрије петоугла $ABCDE$. Ако је $\angle DEA = 130^\circ$ и $\angle EAB = 110^\circ$, одредити угао EDF.





Kako je s osa simetrije, to zaključujemo da je ugao AFD $= 90^0$

Dalje posmatramo četvorougao AFDE. Znamo da je zbir uglova u svakom četvorouglu 360^0.

Kako znamo tri ugla , lako ćemo izračunati nepoznati ugao:

$\measuredangle EDF = 360^0 - (90^0 + 110^0 + 130^0)$
$\measuredangle EDF = 360^0 - 330^0$
$\measuredangle EDF = 30^0$