Trigonometrijske jednačine

1) Jednačine oblika:

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$$
$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$
$$atg^2 x + btgx + c = 0$$
$$actg^2 x + bctgx + c = 0$$

Rešavaju se sa smenom t

Naravno, $at^2 + bt + c = 0$ ima realna rešenja za $D \geq 0$. Kad nadjemo t_1, t_2 vratimo se u smenu i pritom vodimo računa da je kod $\sin x$ i $\cos x$ uslovi $|t_1| \leq 1$ i $|t_2| \leq 1$, dok kod tgx i $ctgx$ mogu t_1 i t_2 uzimati vrednosti iz celog skupa realnih brojeva.

Primer:

Reši jednačine:

a) $2\sin^2 + 3\sin x + 1 = 0$

b) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

v) $tg^2 x - 3tgx + 2 = 0$

g) $2ctgx + tgx = 3$

d) $2\sin^2 x - \cos x = 1$

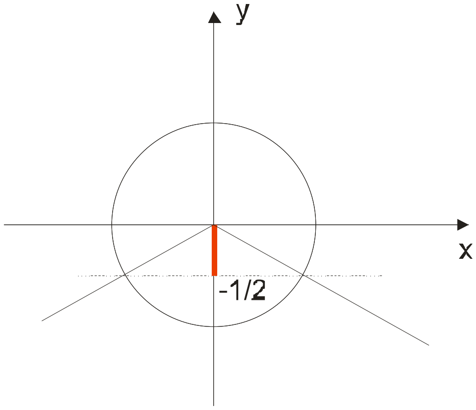
Rešenja:

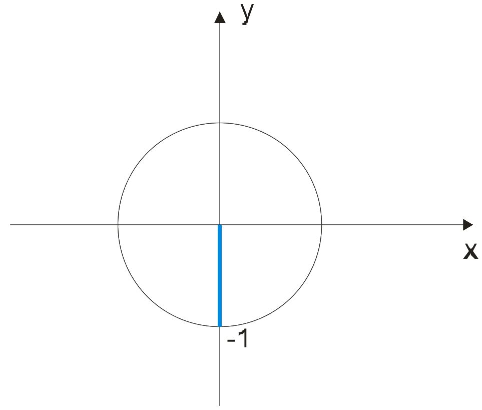
a) $2\sin^2 + 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow$ smena $\sin x = t$

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$
$$t_1 = -\frac{1}{2}$$
$$t_2 = -1$$

Vratimo se u smenu:

$\sin x = -\frac{1}{2}$ ili $\sin x = -1$





$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

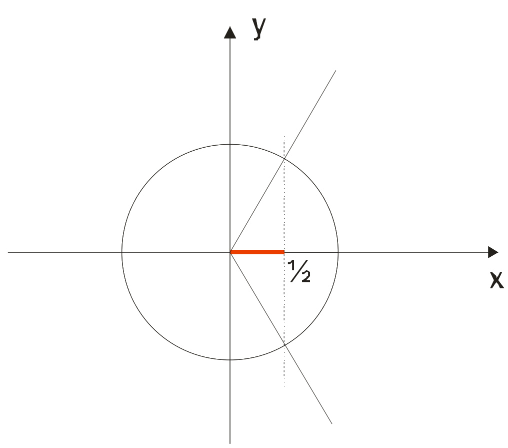
$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

b)

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0 \rightarrow smena \cos x = t$$
$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}$$
$$t_1 = 3 \rightarrow nemoguce -1 \le \cos x \le 1$$
$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Rešavamo $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$



v) $tg^2x - 3tgx + 2 = 0$ smena $tgx = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$t_1 = 2$

$t_2 = 1$

Vratimo se u smenu:

$tgx = 2$ ili $tgx = 1$

Kad se desi da sa kruga ne možemo pročitati vrednost za neku funkciju, upotrebljavamo **arkus** funkciju koja je inverzna trigonometrijska funkcija.

$x_1 = arctg2 + k\pi$ $\quad\quad$ $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

g) 2ctgx+tgx+3$\rightarrow$ znamo da je $tgx = \frac{1}{ctgx}$

2ctgx+$\frac{1}{ctgx} = 3 \rightarrow$ smena: $ctgx = t$

$2t + \frac{1}{t} = 3$

$2t^2 - 3t + 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$

$t_1 = 1$

$t_2 = \frac{1}{2}$

Za $ctgx = 1$ je $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

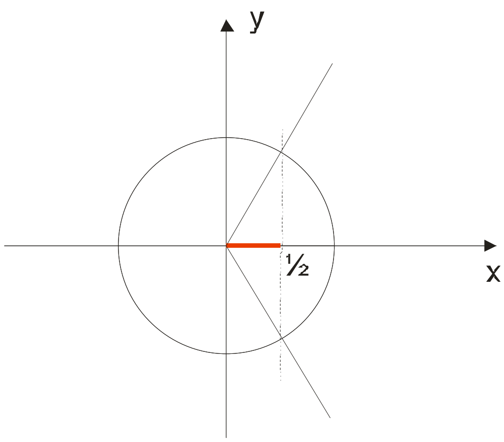
Za $ctgx = \frac{1}{2}$ je $x_2 = arcctg\frac{1}{2} + k\pi$

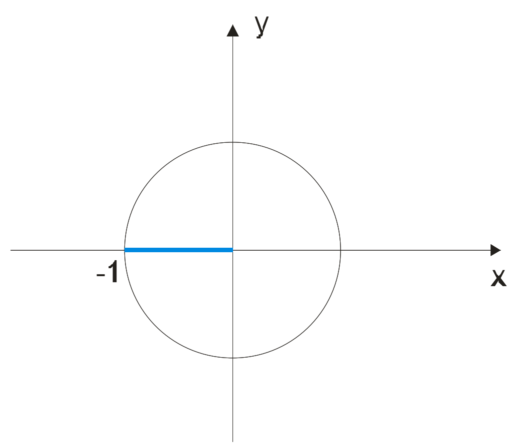
d) $2\sin^2 x - \cos x = 1$

Ovde moramo sve prebaciti ili u sin x ili u cos x. Lakše je upotrebiti $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ i sve prebaciti u cosx.

$$2(1-\cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$$
$$2 - 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$
$$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 / \cdot (-1)$$
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow smena : \cos x = t$$
$$2t^2 + t - 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$
$$t_1 = \frac{1}{2}$$
$$t_2 = -1$$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ili $\cos x = -1$





$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x_2 - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

$$x_3 = \pi + 2k\pi$$
$$k \in Z$$

2) Homogena jednačina

Ona je oblika : $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0$

Rešavamo je tako što sve podelimo sa $\cos^2 x$. Napomenemo da ovde mora biti $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$. Dobijamo:

$atg^2 x + btgx + c = 0$ koju znamo da rešimo!

Na homogenu jednačinu se " svede" i jednačina oblika :
$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = d$

Napišemo kao "trik" da je : $d = d\cdot 1 = d\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$, sve prebacimo na levu stranu i imamo:

$(a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0$

Ovu jednačinu rešavamo kao homogenu.

Primer

Reši jednačine:

a) $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

b) $5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$

Rešenja: a)

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0 / : \cos^2 x \neq 0$$
$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\frac{sonx\cos x}{\cos^2 x} + 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$2tg^2 x - 5tgx + 3 = 0 \to smena(tgx = t)$$
$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{5\pm 1}{4}$$
$$t_1 = \frac{3}{2}$$
$$t_2 = 1$$

Vratimo se u smenu:

Za $\underline{tgx = \frac{3}{2}} \Rightarrow x_1 = arctg\frac{3}{2} + k\pi, k\in Z$

Za $\underline{tgx = 1} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k\in Z$

b)

$$5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$$
$$5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$5\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

Sve prebacimo na levu stranu !

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0 / : \cos^2 x$$
$$3tg^2 x + 2tgx - 1 = 0 \to smena(tgx = t)$$
$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$
$$t_1 = \frac{1}{3}$$
$$t_2 = -1$$

Za $tgx = \frac{1}{3} \Rightarrow x = arctg\frac{1}{3} + k\pi, k \in Z$

Za $tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

<u>3)Jednačine oblika :</u>

$$\sin ax \pm \sin bx = 0$$
$$\cos ax \pm \cos bx = 0$$

i slične....

U njima najpre iskoristimo formule transformacija trigonometrijskih funkcija u proizvod.

Nakon toga: $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$

<u>Primer:</u> Reši jednačine:

a) $\sin 6x - \sin 4x = 0$

b) $\cos 3x + \cos x = 0$

v) $\sin x = \cos 2x$

g) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

Rešenja:

$$\sin 6x - \sin 4x = 0$$
$$2\cos\frac{6x+4x}{2}\sin\frac{6x-4x}{2} = 0$$
$$2\cos 5x \cdot \sin x = 0$$
$$\cos 5x = 0 \vee \sin x = 0$$

cos 5x = 0

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad 5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \qquad x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$$

Zapisano zajedno: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in Z$

sin x = 0

$$x = 0 + 2k\pi \text{ ili } x = \pi + 2k\pi$$

Zapisano zajedno: $x = k\pi$, $k \in Z$

b)

$$\cos 3x + \cos x = 0$$
$$2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 0$$
$$2\cos 2x \cos x = 0$$

$\cos 2x = 0$ ili $\cos x = 0$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$
$$k \in Z$$

$\cos x = 0$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$k \in Z$$

Ako vam nije jasno ne morate raditi ovo “zajedničko” rešenje!

v)

$$\sin x = \cos 2x$$
$$\sin x - \cos 2x = 0$$
$$\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$$

odavde je:

$$2\cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2}\sin\frac{x - (\frac{\pi}{2} - 2x)}{2} = 0$$
$$2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$ ili $\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$

Za $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$ **je:**

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ili $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi$$

Zajedno : $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Za $\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$ **je:**

$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = 0 + 2k\pi$ ili $\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$

$$3x - \frac{\pi}{2} = 4k\pi$$
$$3x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3}$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = 2\pi + 4k\pi$$
$$3x = 2\pi + 4k\pi$$
$$3x = 2\pi + \frac{\pi}{2} + 4k\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3}$$

Zajedno: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$

g)

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$
$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} + \sin 2x = 0$$
$$2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$$
$$\sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \rightarrow odavde:$$

$\sin 2x = 0$ ili $2\cos x + 1 = 0$

$$2x = 0 + 2k\pi \qquad 2x = \pi + 2k\pi$$
$$x = k\pi \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

4) <u>Jednačina oblika:</u> $a\sin x + b\cos x = c$

Ova jednačina može da se rešava na vi še načina:

i) smenom $tg\frac{x}{2} = t$

ii) metodom uvodjenja pomoćnog argumenta

iii) metoda pravljenja sistema

i) **smenom** $tg\frac{x}{2} = t$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \rightarrow$ već izvedeno ranije!

Posle sredjivanja dobije se kvadratna jednačina po t.

Ovde se može javiti problem pri traženju nula dobijenog polinoma. Ovo će nam biti opcija kad nemamo drugih.

Naravno , pošto je smena $tg\frac{x}{2} = t$ mora biti $x \neq \pi + 2k\pi$

ii) **Metoda uvodjenja pomoćnog argumenta**

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$

Uvedemo novi argument φ pomoću :

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{b}{a}, tj, tg\varphi = \frac{b}{a}$$

I početnu jednačinu svedemo na:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Naravno, mora biti : $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$ to jest $a^2+b^2 \ge c^2$.

Ako je $a^2+b^2 < c^2$ jednačina nema rešenja.

iii) **Metoda pravljenja sistema**

jednačini $a\sin x + b\cos x = c$ dodamo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Iz prve jednačine izrazimo sinx ili cosx i zamenimo u drugu. Dobijamo kvadratnu jednačinu po jednoj nepoznatoj $(\sin x \vee \cos x)$.

Primer

Reši jednačinu :

a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

b) $2\sin x + 5\cos x = 4$

Rešenje:

a) Probajmo metodu pomoćnog argumenta:

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Rightarrow a = 1, b = \sqrt{3}, c = 2$

$a^2 + b^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 1 + 3 = 4$ uslov: $a^2+b^2 \ge c^2$, $4 \ge 4$ ispunjen uslov!

$c^2 = 4$

$$\varphi = arctg\frac{b}{a}$$

$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$tg\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^o = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

Zamenimo u:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{3}) = 1$$

$$x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$k \in Z$$

Dakle, ova metoda je "dobra". Uvek probajte prvo nju!

b)

$$2\sin x + 5\cos x = 4$$
$$a = 2, b = 5, c = 4$$

uslov : $a^2+b^2 \geq c^2$, $4+25 \geq 16$, ispunjen!!!

$$tg\varphi = \frac{b}{a}$$

$$tg\varphi = \frac{5}{2}$$

Evo problema! Ne možemo lako naći ugao!

Probajmo treću metodu, sa sistemom.

$$2\sin x + 5\cos x = 4 \Rightarrow \cos x = \frac{4-2\sin x}{5}$$

To zamenimo u $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^2 x + (\frac{4-2\sin x}{5})^2 = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{16-16\sin x + 4\sin^2 x}{25} = 1$$

$$25\sin^2 x + 16 - 16\sin x + 4\sin^2 x = 25$$

$$29\sin^2 x - 16\sin x - 9 = 0 \rightarrow smena(\sin x = t)$$

$$29t^2 - 16t - 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{1300}}{58} = \frac{16 \pm 10\sqrt{13}}{58}$$

$$t_1 = \frac{16+10\sqrt{13}}{58} = \frac{2(8+5\sqrt{13})}{58} = \frac{8+5\sqrt{13}}{29} \approx 0{,}896$$

$$t_2 = \frac{16-10\sqrt{13}}{58} = \frac{8-5\sqrt{13}}{29} \approx -0{,}346$$

Dakle

$$x = \arcsin(\frac{8+5\sqrt{13}}{29}) + 2k\pi$$

$$x = \arcsin(\frac{8-5\sqrt{13}}{29}) + 2k\pi$$

<u>5) Smena $\cos 2x = t$</u>

Ako se u zadatoj jednačini javljaju izrazi $\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x,$ primenjujemo ovu smenu.

Važe zamene:

$$\sin^2 x = \frac{1-t}{2}; \cos^2 x = \frac{1+t}{2}$$

<u>Primer</u> Reši jednačinu: $8\cos^6 x - 4\sin^4 x = \cos 2x$

Rešenje:

Uvodimo smenu $\cos 2x = t$

$$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = (\frac{1+t}{2})^3$$

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (\frac{1-t}{2})^2$$

$$8\cos^6 x - 4\sin^4 x = \cos 2x$$

$$8(\frac{1+t}{2})^3 - 4(\frac{1-t}{2})^2 = t$$

$$8\frac{1+3t+3t^2+t^3}{8} - 4\cdot\frac{1-2t+t^2}{4} = t$$

$$1+3t+3t^2+t^3 - 1+2t-t^2-t = 0$$

$$t^3+2t^2+4t = 0$$

$$t(t^2+2t+4) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t^2+2t+4 = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

Rešenje je :

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$$

Ovo su neki od metoda za rešavanje trigonometrijskih jednačina.

Treba reći da **ne postoji** opšti metod za svaku trigonometrisku jednačinu.

Probajte da transformišete date izraze, koristeći poznate formule,"pravite" proizvod koji će biti jednak nuli, uvodite odgovarajuće smene.

Srećno!