

Osnovne trigonometrijske jednačine

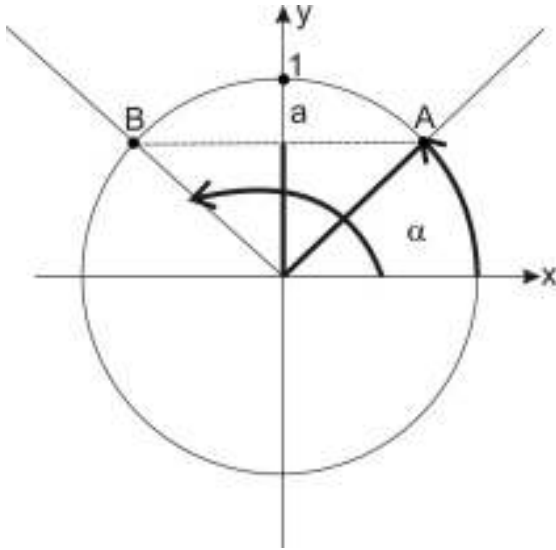
1. $\sin x = a$

Ova jednačina ima rešenja ako je $-1 \leq a \leq 1$ zbog ograničenosti sinusne funkcije između -1 i 1. Da bi lakše razumeli kako se rešavaju ove jednačine, posmatraćemo sledeće situacije:

- i) $0 < a < 1$
- ii) $-1 < a < 0$
- iii) $a = 0$
- iv) $a = 1$
- v) $a = -1$

i) $\sin x = a \quad 0 < a < 1$

Postupak: Nadjemo vrednost a na y-osi i povučemo pravu $y = a$. Ona seče trigonometrijski krug (tačke A i B) i spojimo sa koordinatnim početkom. Dobili smo dva tražena ugla: (α) i $(\pi - \alpha)$. Evo slike:



Rešenja zapisujemo:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha + 2k\pi \\x_2 &= (\pi - \alpha) + 2k\pi \\k &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

PAZI:

$2k\pi$ dodajemo zbog periodičnosti funkcije $\sin x$, koja je $2\pi = 360^\circ$, to je obavezno!

Rešenje se (kad postaneteiskusni) može sjediniti i u jedno rešenje:

$$x_k = (-1)^k \alpha + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Primer:

Rešiti jednačinu: $\sin x = \frac{1}{2}$

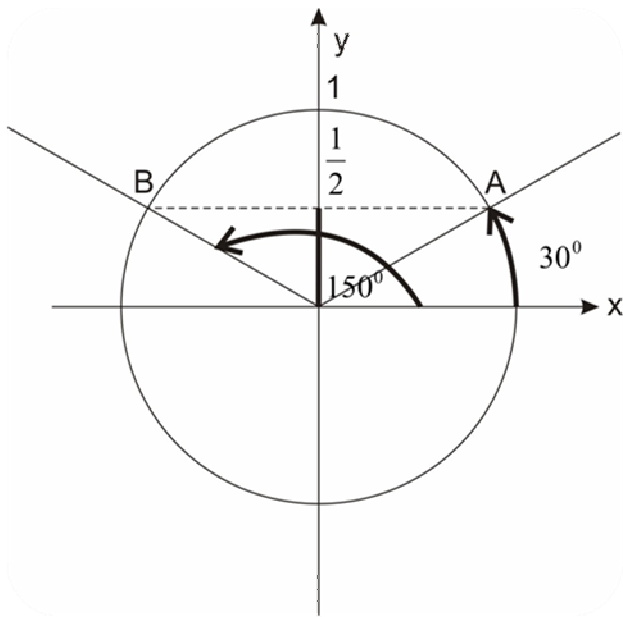
Rešenje: Prvo nacrtamo trigonometrijski krug. Nadjemo na y -osi vrednost $\frac{1}{2}$ i povučemo pravu $y = \frac{1}{2}$, paralelnu sa x -osom. Ta prava seče trigonometrijski krug u tačkama A i B. Te tačke spajamo sa koordinatnim početkom i dobili smo tražene uglove.

Iz **tablice** (ko zna) vidimo da su traženi uglovi:

$$\alpha_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_2 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

Evo slike:



Rešenja su:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

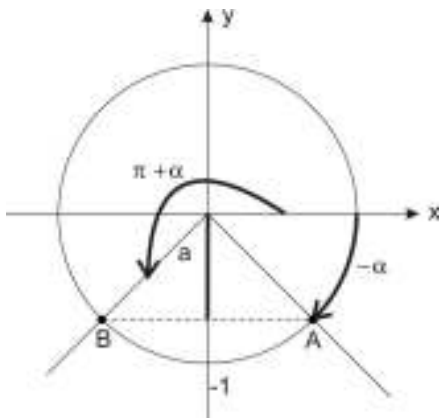
$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ili zajedno: } x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$$

ii) $\sin x = a$ $-1 < a < 0$

Postupak je sličan kao malopre. Nadjemo vrednost a na y -osi (**pazi**: sad je a negativno pa je ispod x -ose), povučemo pravu paralelnu sa x -osom. Mesta gde prava $y=a$ seče trigonometrijski krug (A i B) spojimo sa koordinatnim početkom i dobili smo tražene uglove: $(-\alpha)$ i $(\pi + \alpha)$

Na slici to izgleda:



Rešenja su:

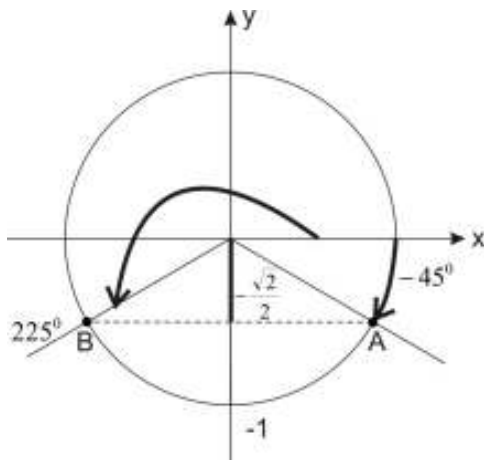
$$x_1 = -\alpha + 2k\pi$$

$$x_2 = (\pi + \alpha) + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Primer:

Reši jednačinu: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$-45^\circ = -\frac{\pi}{4}$$

$$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

Rešenja su:

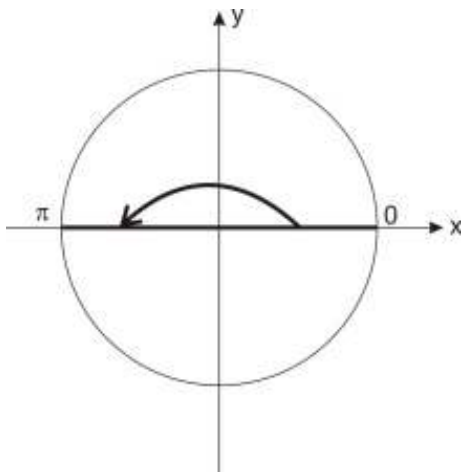
$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Naravno, ovo negativno rešenje $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ možemo napisati i kao $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ ali je običaj da se uglovi u IV kvadrantu pišu kao negativni

iii) $\sin x = 0$



Sinusi su jednaki nuli za uglove od 0° i 180°

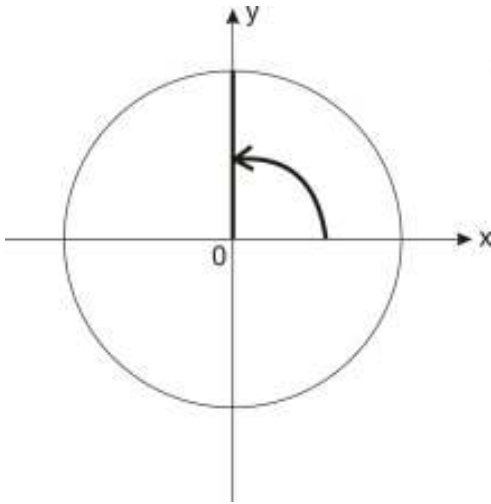
$$x = 0 + 2k\pi$$

$$x = \pi + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Ili zajedno: $x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

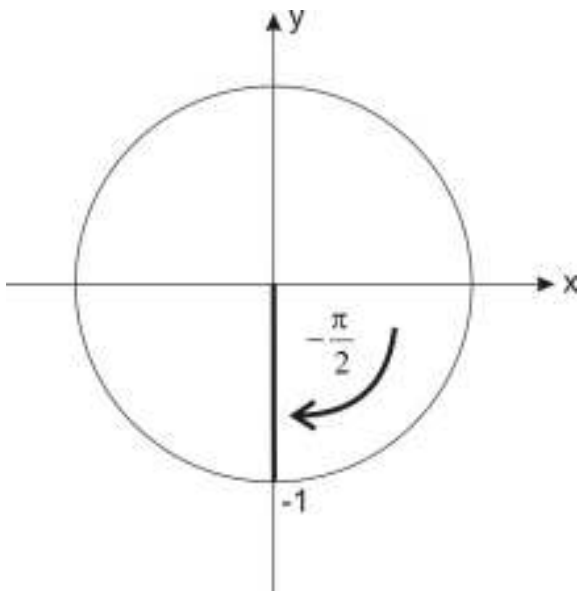
iv) $\sin x = 1$



Sinus ima vrednost 1 za ugao od 90°

Ovde imamo samo jedno rešenje: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$

v) $\sin x = -1$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$$

Ili možemo zapisati preko pozitivnog ugla:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$$

2. $\cos x = b$

Kao i kod $\sin x = a$ i ovde mora biti $-1 \leq b \leq 1$ da bi jednačina imala rešenja. I ovde ćemo rasčlaniti problem:

- i) $0 < b < 1$
- ii) $-1 < b < 0$
- iii) $b = 0$
- iv) $b = 1$
- v) $b = -1$

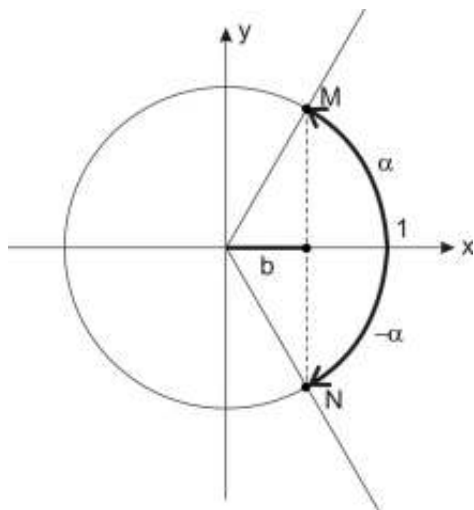
i) $\cos x = b$ $0 < b < 1$

Ovi uglovi se nalaze u I i IV kvadrantu.

Postupak:

Na x -osi nadujemo vrednost b . Povučemo pravu paralelnu sa y -osom. Ta prava seče

trigonometrijski krug u tačkama M i N. Spojimo te tačke sa koordinatnim početkom i dobili smotražene uglove: α i $(-\alpha)$



Rešenja su:

$$x = \alpha + 2k\pi$$

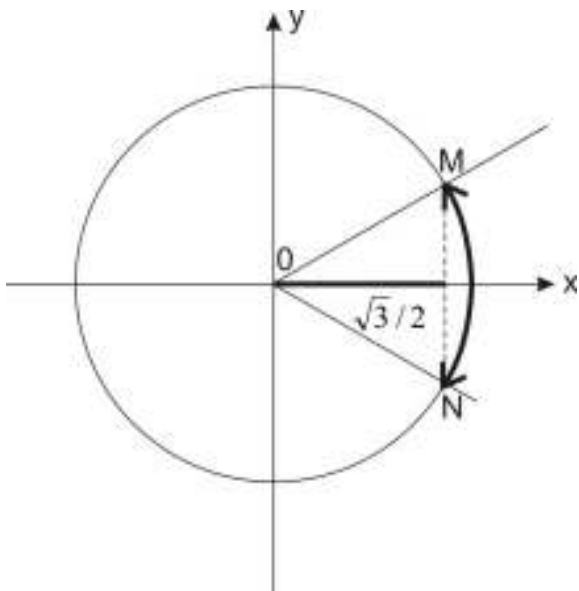
$$x = -\alpha + 2k\pi$$

$$k \in Z$$

Ugao α odredimo iz tablica ili konstruktivno.

Primer:

Reši jednačinu: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Rešenja su:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z$$

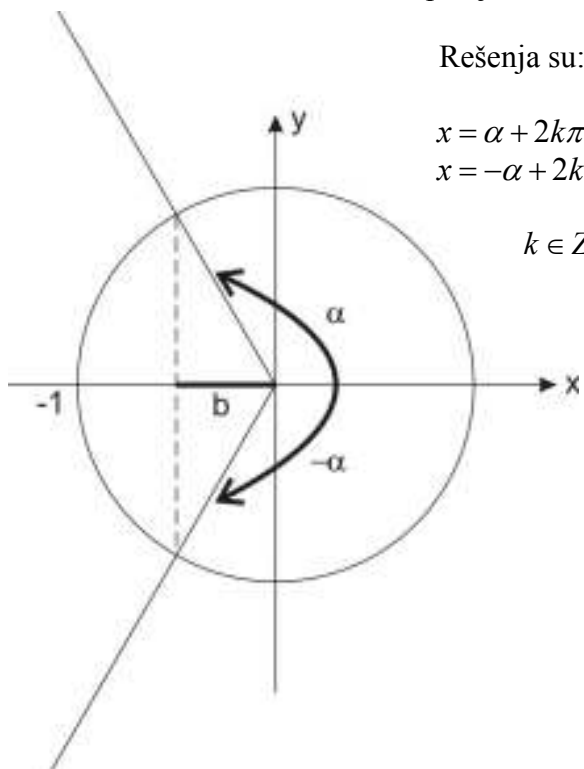
$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z$$

Jer je $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

To jest $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ii) $\cos x = b \quad -1 < b < 0$

Ovi uglovi se nalaze u II i III kvadrantu. Postupak je isti, samo je b negativno!



Rešenja su:

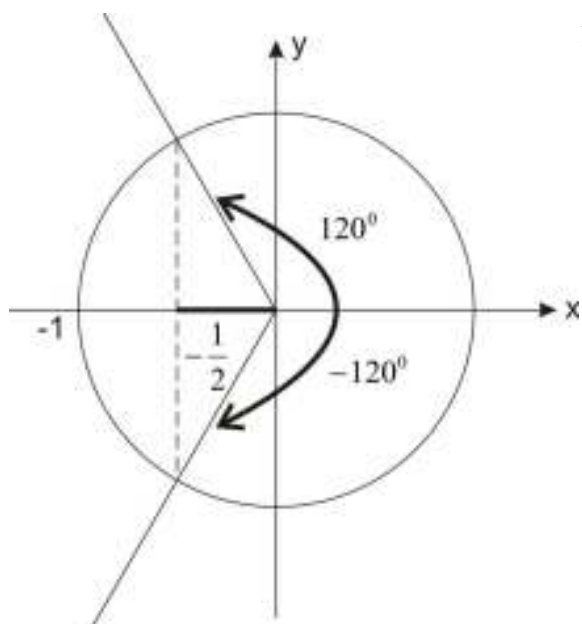
$$x = \alpha + 2k\pi$$

$$x = -\alpha + 2k\pi$$

$$k \in Z$$

Primer:

Reši jednačinu $\cos x = -\frac{1}{2}$



$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

Rešenja su:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

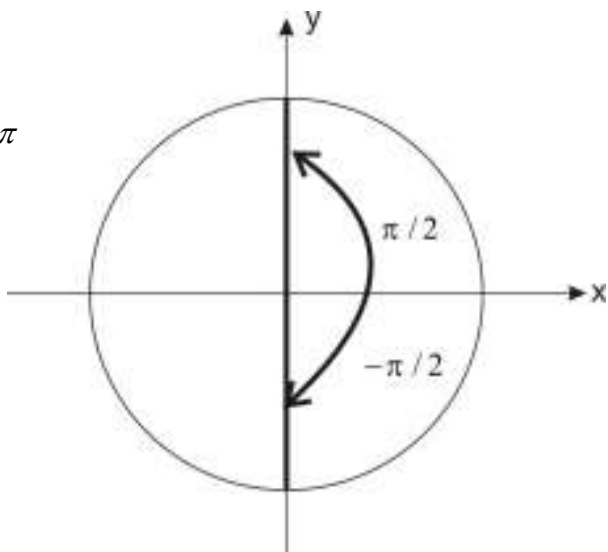
$$k \in Z$$

iii) $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

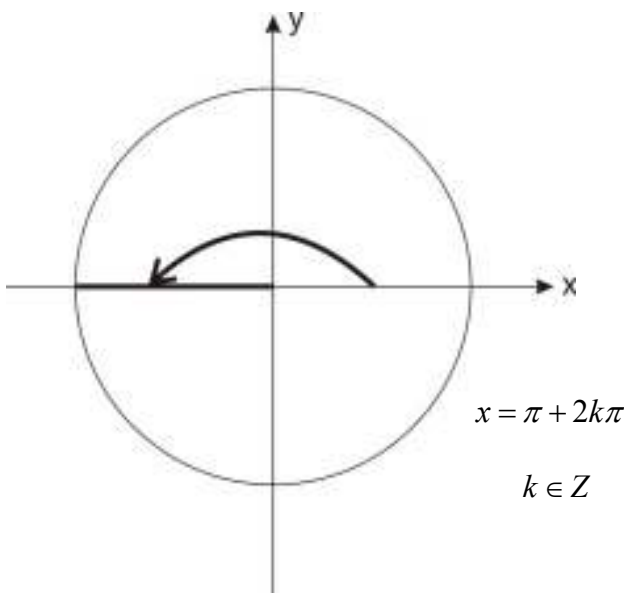
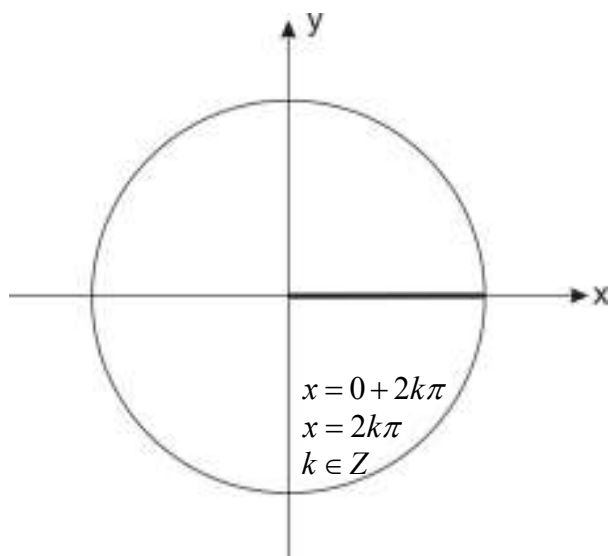
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$



iv) $\cos x = 1$

v) $\cos x = -1$



3. $\operatorname{tg} x = m$

Za razliku od prethodne dve, jednačina $\operatorname{tg} x = m$ ima rešenja za $\forall m \in (-\infty, \infty)$. Razmotrićemo dve situacije: $m > 0$ i $m < 0$

i) $\operatorname{tg} x = m \quad m > 0$

To su uglovi u I i III kvadrantu!

Postupak: Na tangesnoj osi nadjemo m i to spojimo sa koordinatnim početkom. Dobili smo ugao α .

Produžimo taj ugao u III kvadrant i evo drugog rešenja: $\pi + \alpha$

Rešenje je:

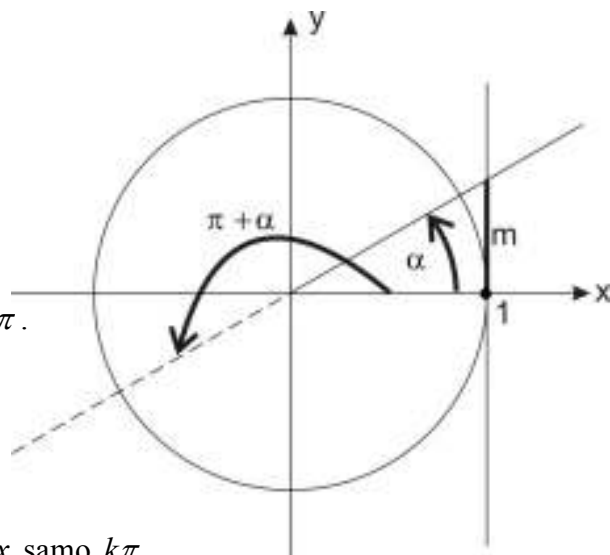
$$x = \alpha + k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Zašto samo jedno rešenje?

Zato što je $\operatorname{tg}x$ kao i $\operatorname{ctg}x$ periodična funkcija sa periodom π .

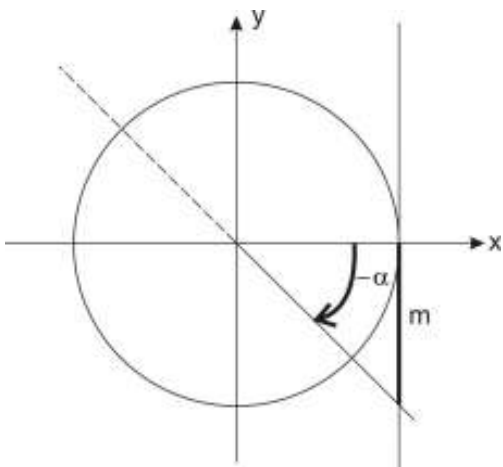
Pa kad stavimo $k\pi$ mi smo to rešenje već opisali!



Zapamti: Kod $\sin x$ i $\cos x$ je perioda $2k\pi$ a kod $\operatorname{tg}x$ i $\operatorname{ctg}x$ samo $k\pi$.

ii) $\operatorname{tg}x = m \quad m < 0$

Ovi uglovi su u II i IV kvadrantu! Postupak je potpuno isti.



Rešenje:

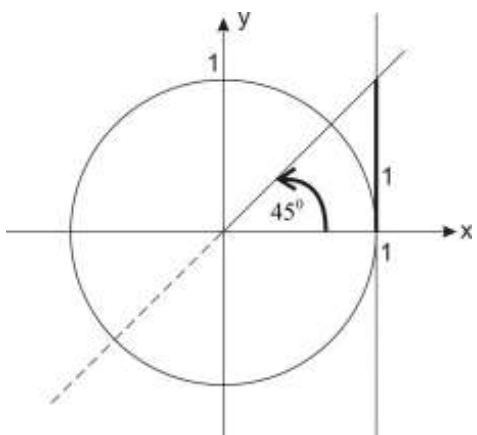
$$x = -\alpha + k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Primer 1.

Reši jednačinu: $\operatorname{tg}x = 1$

Rešenje: (iz tablice znamo: $\operatorname{tg}45^\circ = 1$)



$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

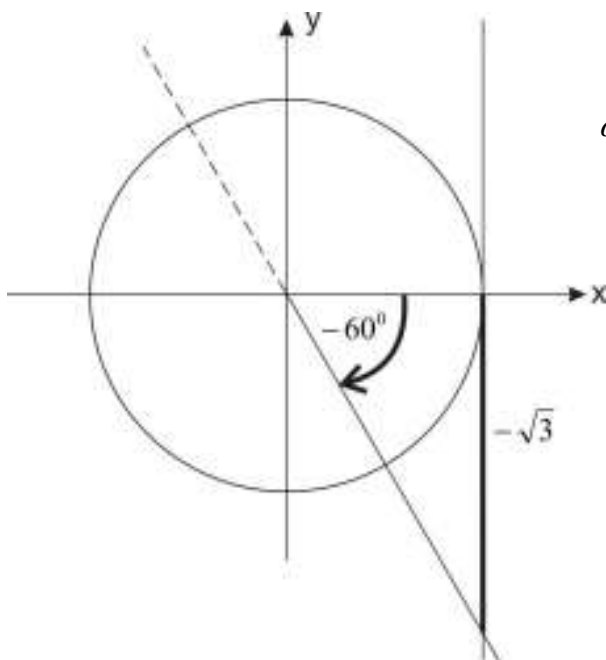
$$k \in \mathbb{Z}$$

Primer 2.

Reši jednačinu: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Rešenje: Iz tablice je $\operatorname{tg} 60^\circ = +\sqrt{3}$, pa je onda $\operatorname{tg}(-60^\circ) = -\sqrt{3}$ jer je $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Crtamo sliku:

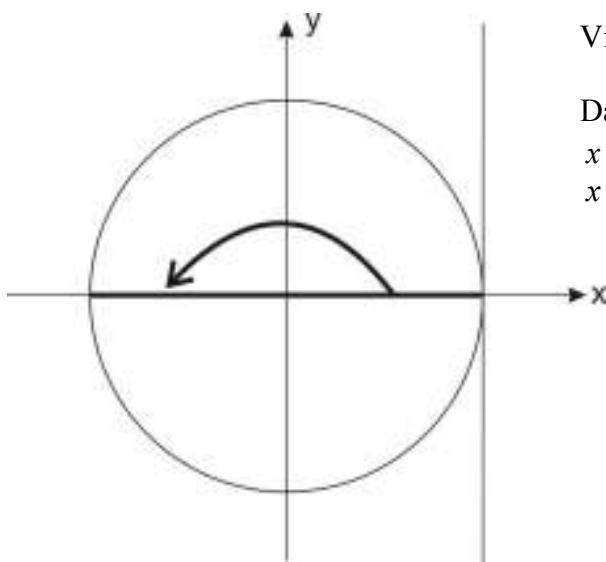


Dakle:

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$
$$k \in Z$$

Primer 3.

Reši jednačinu: $\operatorname{tg} x = 0$



Vidimo da su to uglovi od 0° i 180°

Dakle:

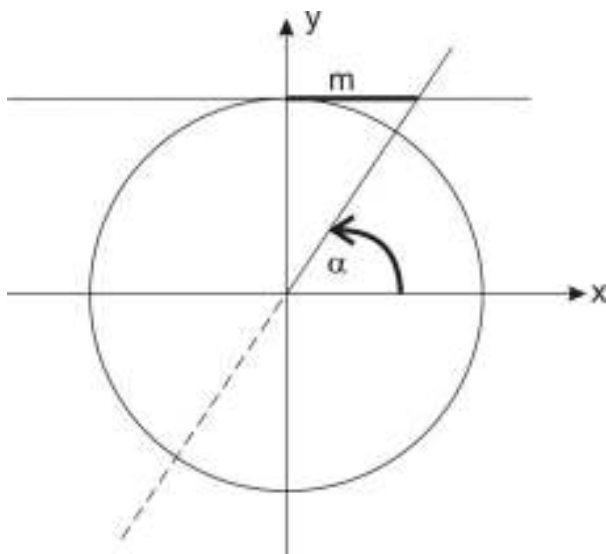
$$x = 0^\circ + k\pi$$
$$x = k\pi$$
$$k \in Z$$

4. $ctgx = m$

Kao i za tgx rešenja su iz celog skupa R . Perioda je $k\pi$. Postupak rešavanja je sličan, samo što vrednost za $ctgx$ tražimo na kotangensnoj osi

$$ctgx = m$$

$$m > 0$$



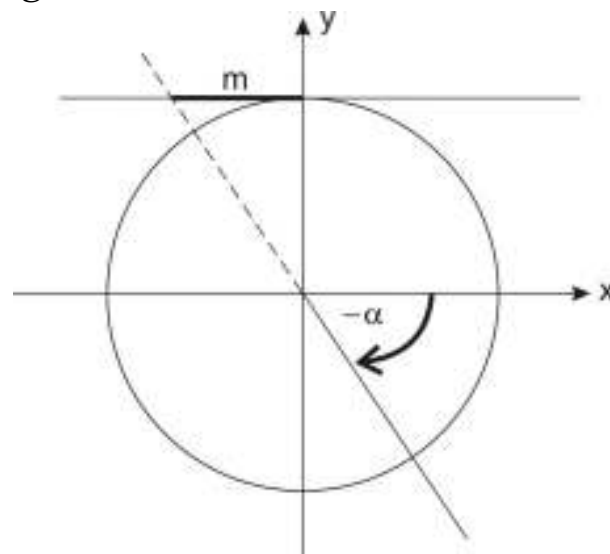
Uglovi su u I i III kvadrantu.

$$\text{Rešenje: } x = \alpha + k\pi$$

$$k \in Z$$

$$ctgx = m$$

$$m < 0$$



Uglovi su u II i IV kvadrantu.

$$\text{Rešenje: } x = -\alpha + k\pi$$

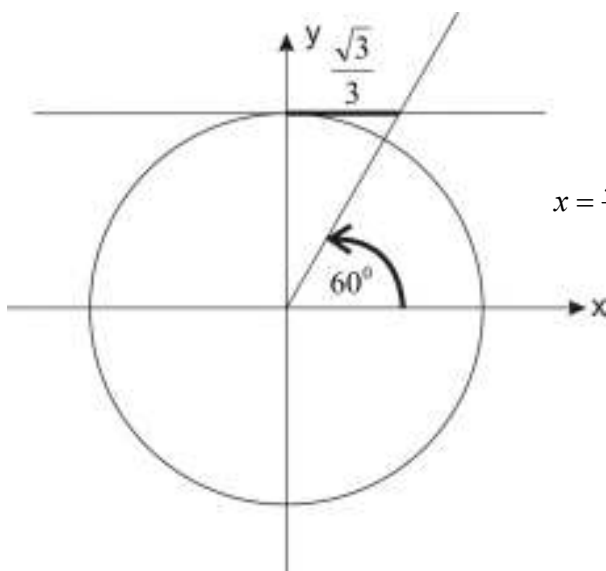
$$k \in Z$$

Najpre potražimo vrednost u tablici, vidimo koji je ugao u pitanju i nacrtamo sliku.

Primer 1.

$$\text{Reši jednačinu: } ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

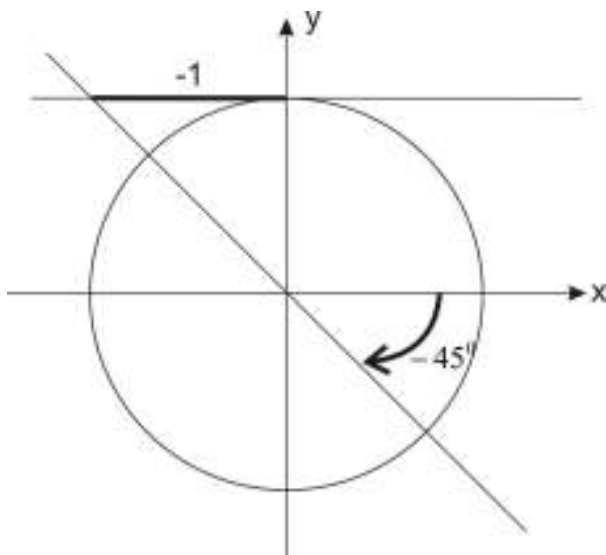
Rešenje: iz tablice vidimo vrednost za 60°



$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in Z$$

Primer 2.

Reši jednačinu: $\operatorname{ctgx} = -1$



$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

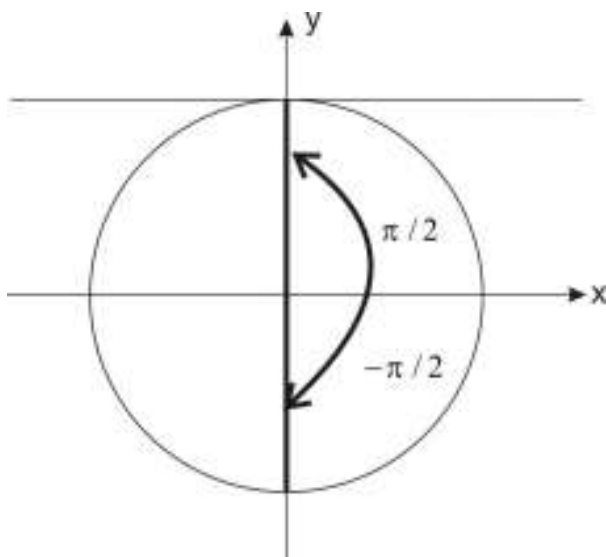
A može i:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$k \in Z$$

Primer 3.

Rešiti jednačinu: $\operatorname{ctgx} = 0$



$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$k \in Z$$

Zadaci

1) Reši jednačine:

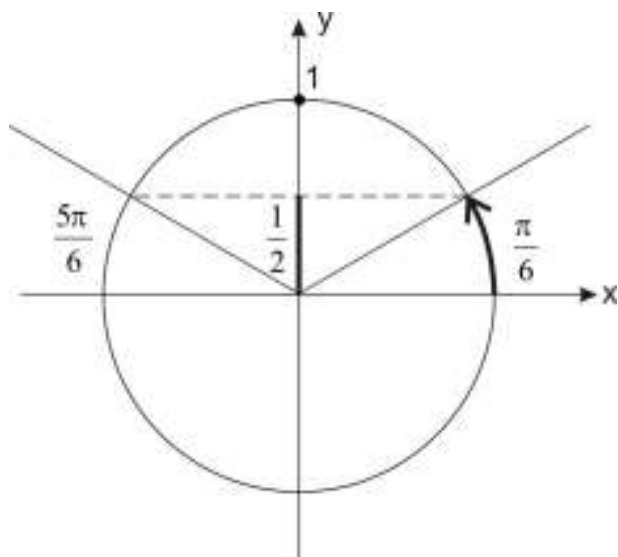
a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Rešenje:

a) Jednačinu rešavamo normalno, kao da je $\sin x$. (al pišemo $2x$ u rešenju...)

Iz tablice vidimo da je jedan traženi ugao 30°



Pazi sad:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Sada izrazimo x , odnosno sve podelimo sa 2

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

$k \in Z$

b) Isto rešavamo kao da je $\sin x = 0$ ali posle ne pišemo $x = \dots$. Nego $x - \frac{\pi}{3} = \dots$ pa izračunamo!

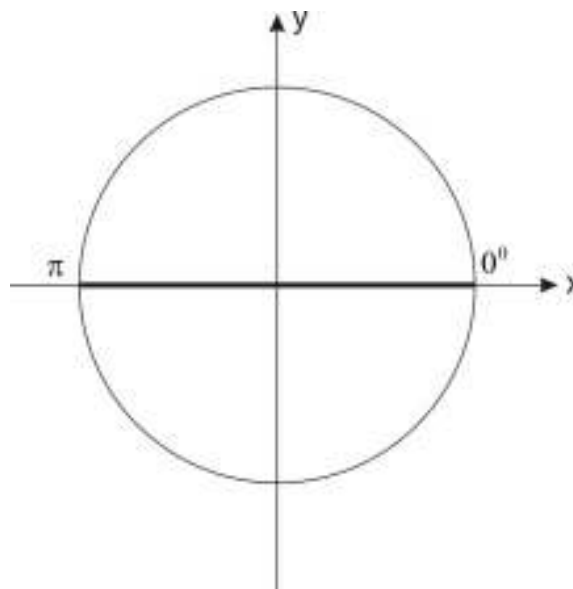
Dakle:

$$x - \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in Z \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$k \in Z$

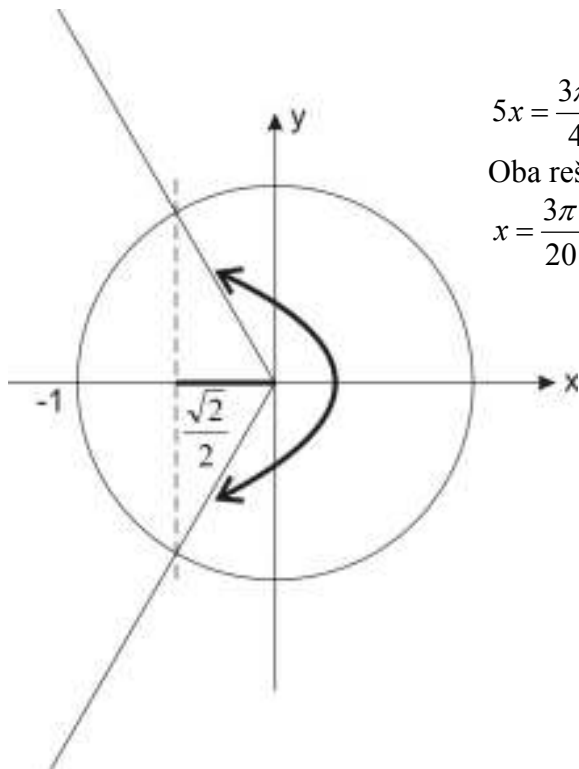


2) Reši jednačine:

a) $\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Rešenje: $\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$5x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad 5x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Oba rešenja podelimo sa 5

$$x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ili} \quad x = -\frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$$

$k \in Z$ $k \in Z$

b)

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

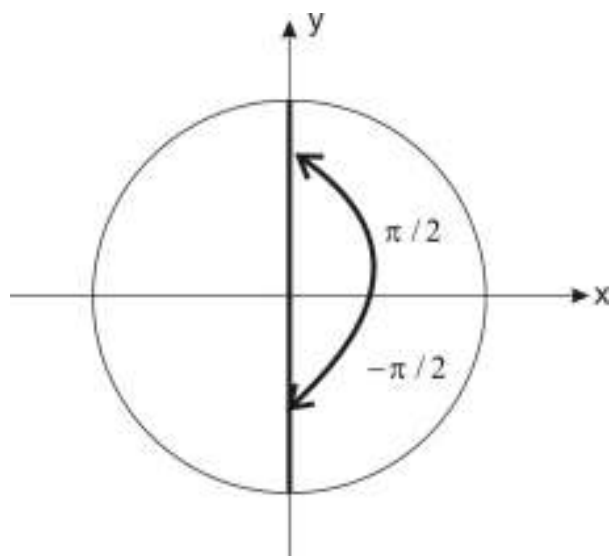
$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{4\pi}{6} + 2k\pi \quad 2x = \frac{-2\pi}{6} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$k \in Z \quad k \in Z$$



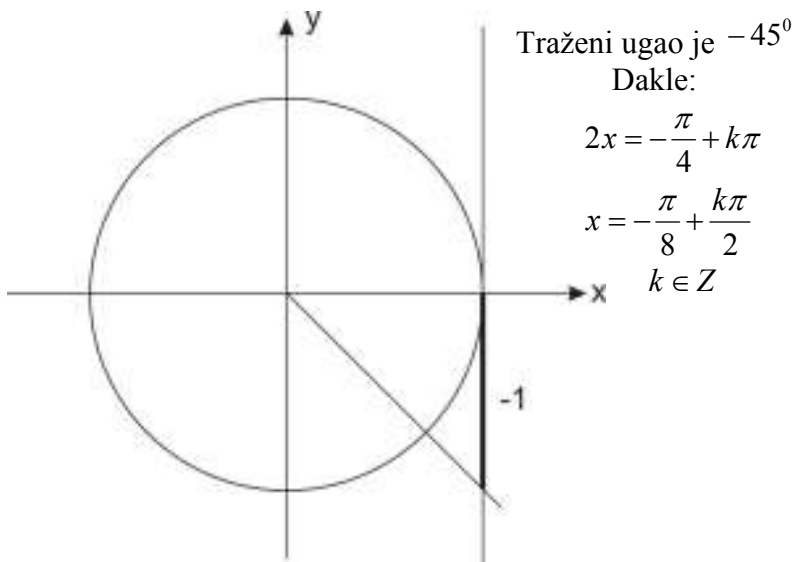
3) Rešiti jednačine:

a) $\operatorname{tg} 2x = -1$

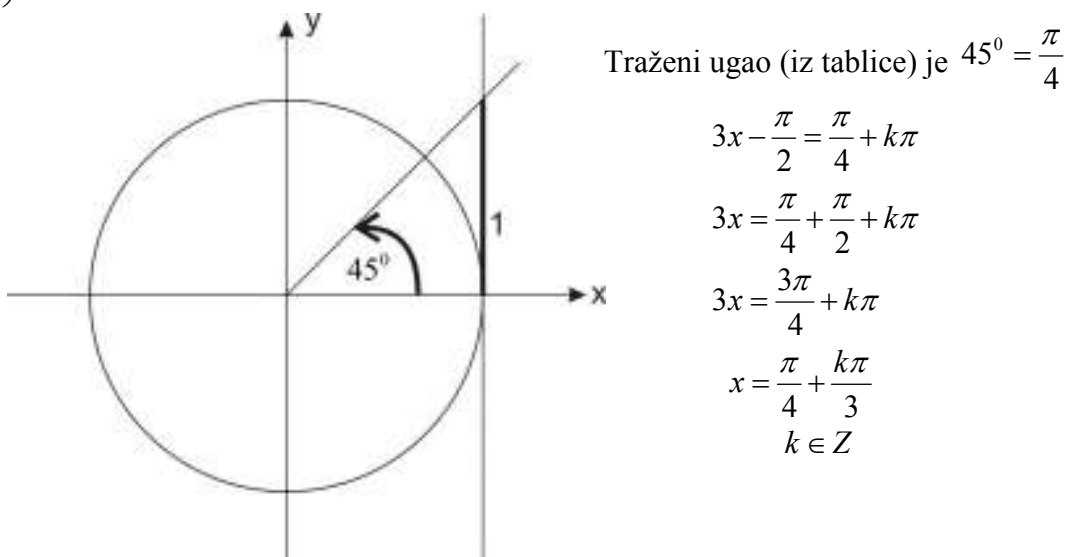
b) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Rešenje:

a) $\operatorname{tg} 2x = -1$



b) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$



4) Rešiti jednačine:

a) $\operatorname{ctg} 3x = 1$

b) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

Rešenje:

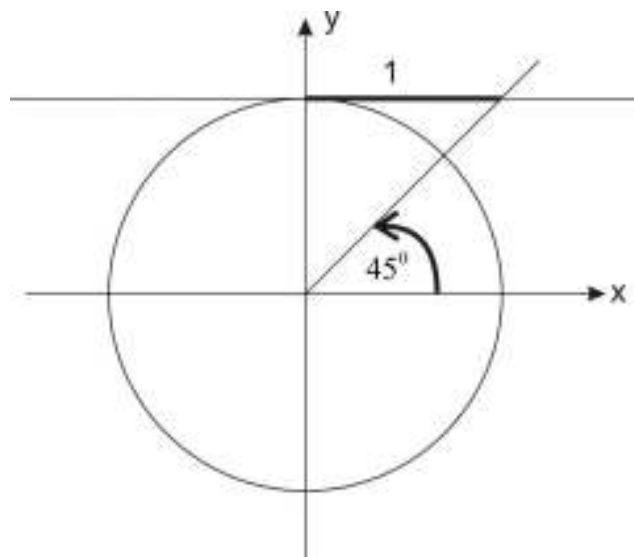
a) $\operatorname{ctg} 3x = 1$ Iz tablice vidimo da je traženi ugao 45°

Dakle:

$$3x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$



b) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

$$x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{4\pi}{6} + k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

