ADICIONE FORMULE

Zbir uglova

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$
$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$$

Razlika uglova

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$
$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

Primećujete da su formule za razliku uglova iste kao i za zbir uglova samo su promenjeni znaci!
Naravno, učenicima je uvek problem da zapamte formule a “bezobrazni’’ profesori im ne daju da ih koriste iz knjige. Naš je savet da probate da sebi stvorite “asocijaciju’’ koja će vam pomoći da zapamtite odredjenu formulu. Autor ovoga teksta vam nudi svoju “asocijaciju’’:

Zapamtite dve male “pesmice’’ koje odgovaraju na dve početne formule:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \wedge \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

“sin - ko više ko-si “ “kosi-kosi manje sine-sine”

Uvek prvo pišite ugao α pa β

Za $tg(\alpha+\beta)$ znamo da je:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$ (sad gde vidite sinus zamenite ga sa tangens a kosinus sa jedinicom) $=\frac{tg\alpha\cdot 1+1\cdot tg\beta}{1\cdot 1-tg\alpha tg\beta}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

Za $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=$ (zamenite sinus sa 1, a kosinus sa kotanges) $=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta-1\cdot 1}{1\cdot ctg\beta+ctg\alpha\cdot 1}=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+tg\alpha}$

Znači zapamtili smo "sinko više kosi'' i "kosi kosi manje sine sine'' i izveli smo formule za zbir uglova. Za razliku uglova samo promenimo znake!

1) Naći bez upotrebe računskih pomagala vrednost trigonometrijskih funkcija uglova od
a) 15^0 b) 75^0 i v) 105^0

a)

$$\sin 15^o=\sin(45^o-30^o)$$
$$=\sin 45^o\cdot\cos 30^o-\cos 45^o\sin 30^o$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$
$$\cos 15^o=\cos(45^o-30^o)$$
$$=\cos 45^o\cos 30^o+\sin 45^o\sin 30^o$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$
$$tg15^o=tg(45^o-30^o)=\frac{tg45^o-tg30^o}{1+tg45^o tg30^o}$$
$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{\cancel{3}}}{\frac{3+\sqrt{3}}{\cancel{3}}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$
$$=\text{ racionališemo sa }\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{3^2-\sqrt{3}^2}=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=\frac{6\left(2-\sqrt{3}\right)}{6}=2-\sqrt{3}$$

Naravno $tg15^o$ smo mogli izračunati i lakše $tg15^o=\dfrac{\sin 15^o}{\cos 15^o}\ldots$

$$ctg15^o=\frac{1}{tg15^o}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

b)

$$\sin 75^o = \sin(45^o + 30^o)$$
$$= \sin 45^o \cos 30^o + \cos 45^o \sin 30^o$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$$

$$\cos 75^o = \cos(45^o + 30^o)$$
$$= \cos 45^o \cos 30^o - \sin 45^o \sin 30^o$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

$$tg75^o = \frac{\sin 75^o}{\cos 75^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}}{\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \text{(moramo opet racionalizaciju)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$ctg75^o = \frac{1}{tg75^o} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

v) $\sin 105^o = \sin(90^o + 15^o) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 15^o\right) =$ (imamo formulu) $= \cos 15^o =$

(a ovo smo već našli) $= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

Naravno, isto bismo dobili i preko formule $\sin 105^o = \sin\left(60^o + 45^o\right)$

$$\cos 105^o = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 15^o\right) = -\sin 15^o = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

$$tg105^o = tg\left(\frac{\pi}{2} + 15^o\right) = -ctg15^o = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$ctg105^o = ctg\left(\frac{\pi}{2} + 15^o\right) = -tg15^o = -(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

opet ponavljamo da može i ideja da je $tg105^0 = tg(60^o + 45^o)$ …itd.

2)

a) Proveri jednakost $\sin 20^o \cos 10^o + \cos 20^o \sin 10^o = \frac{1}{2}$

$$\sin 20^o \cos 10^o + \cos 20^o \sin 10^o = (\text{ovo je: } \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta))$$

$$= \sin(20^o + 10^o) = \sin 30^o = \frac{1}{2}$$

b) $\cos 47^o \cos 17^o + \sin 47^o \sin 17^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 47^o \cos 17^o + \sin 47^o \sin 17^o = (\text{ovo je: } \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta))$$

$$= \cos(47^o - 17^o) = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

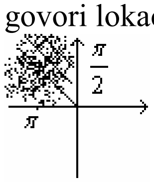
3) Izračunati $\sin(\alpha+\beta)$, ako je $\sin\alpha = +\frac{3}{5}, \cos\beta = -\frac{5}{13}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \underline{\cos\alpha} \cdot \underline{\sin\beta}$$

Znači "fale'' nam $\cos\alpha$ i $\sin\beta$. Njih ćemo naći iz osnovne indentičnosti:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{25-9}{25}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$
$$\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Dal da uzmemo + ili – to nam govori lokacija ugla

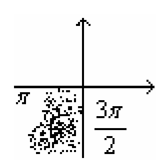


$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Ovde su kosinusi negativni!(«čitamo» ih na x-osi) Znači da je $\boxed{\cos\alpha = -\frac{4}{5}}$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$
$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$$
$$\sin^2\beta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2$$
$$\sin^2\beta = \frac{169-25}{169}$$
$$\sin^2\beta = \frac{144}{169}$$
$$\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$$
$$\sin\beta = \pm\frac{12}{13}$$

ovde su sinusi negativni



$\boxed{\sin\beta = -\frac{12}{13}}$

(«čitamo» ih na y-osi)

Vratimo se da izračunamo $\sin(\alpha+\beta)$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{33}{65}$$

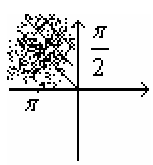
4) Izračunati $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ za koje je $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)+tg\alpha}{1-tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot tg\alpha}=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$$

Pošto je $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, znači moramo naći $\cos\alpha$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\left(\frac{12}{13}\right)^2+\cos^2\alpha=1$$
$$\cos^2\alpha=1-\frac{144}{169}$$
$$\cos^2\alpha=\frac{169-144}{169}$$
$$\cos^2\alpha=\frac{25}{169}$$
$$\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{25}{169}}$$
$$\cos\alpha=\pm\frac{5}{13}$$

Da li uzeti + ili – ? $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$



Ovde su kosinusi negativni! («čitamo» ih na x-osi)

Dakle : $\boxed{\cos\alpha=-\frac{5}{13}}$

$$tg\alpha=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}$$
$$tg\alpha=-\frac{12}{5}$$

Vratimo se u zadatak:

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1-\frac{12}{5}}{1+\frac{12}{5}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\frac{-7}{5}}{\frac{17}{5}}=-\frac{7}{17}}$$

5) Ako su α i β oštri uglovi i ako je $tg\alpha=\frac{1}{2}$ i $tg\beta=\frac{1}{3}$ pokazati da je $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

Rešenje:

Ispitajmo koliko je $tg(\alpha+\beta)=?$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$$

Znači: $tg(\alpha+\beta)=1$, ovo je moguće u 2 situacije: $\alpha+\beta=45^o$ ili $\alpha+\beta=225^o$ pošto su α i β oštri uglovi, zaključujemo:

$$\alpha+\beta=45^o \quad \text{tj.} \ \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

6) Dokazati da je $(2+3tg^2y)tg(x-y)=tgy,$ ako je $2tgx-3tgy=0$

Rešenje:

$$(2+3tg^2y)tg(x-y)=$$

$$(2+3tg^2y)\cdot\frac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}=\text{(pošto je } 2tgx-3tgy=0 \text{ zaključujemo } tgx=\frac{3tgy}{2}\text{)}$$

$$(2+3tg^2y)\cdot\frac{\frac{3tgy}{2}-tgy}{1+\frac{3tgy}{2}\cdot tgy}=$$

$$(2+3tg^2y)\cdot\frac{\frac{3tgy-2tg}{2}}{\frac{2+3tg^2y}{2}}=$$

$$\cancel{(2+3tg^2y)}\cdot\frac{3tgy-2tgy}{\cancel{2+3tg^2y}}=tgy$$

Ovim je dokaz završen.

7) Dokazati identitet:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

Rešenje:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=$$ (sada ćemo izvući: $\cos\alpha\cos\beta$ i gore i dole)

$$=\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

8) Ako je $tg\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, tg\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, dokazati da je $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$

Rešenje:

Sredimo prvo izraze $tg\alpha$ i $tg\beta$

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$ (izvršimo racionalizaciju)

$$tg\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\sqrt{2}^2-1^2}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$$tg\alpha=3+2\sqrt{2}$$

$$tg\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dalje koristimo formulicu: $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{3+2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)}=$$ 2 je zajednički i gore i dole=

$$=\frac{\frac{6+4\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{2}}=\frac{\frac{6+3\sqrt{2}}{2}}{\frac{6+3\sqrt{2}}{2}}=\frac{\cancel{\frac{6+3\sqrt{2}}{2}}}{\cancel{\frac{6+3\sqrt{2}}{2}}}=\boxed{1}$$

Dakle $tg(\alpha-\beta)=1$, to nam govori da je $\alpha-\beta=45^o$ ili $\alpha-\beta=225^o$. Pošto u zadatku kaže da je $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ zaključujemo $\alpha-\beta=45^o$ tj. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ što je i trebalo dokazati!