EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE

Jednačine u kojima se nepoznata javlja i kao izložilac (eksponent) nekog stepena nazivaju se eksponencijalne jednačine.

Pošto je eksponencijalna funkcija bijektivno preslikavanje ("1-1" i "na") možemo upotrebljavati:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Ovo znači da kada na obe strane napravimo iste osnove, osnove kao "skratimo'' i uporedjujemo eksponente.

<u>Evo nekoliko primera:</u>

1) Reši jednačine

a) $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$

b) $8^{x+1} = 16 \cdot 2^{x-2}$

v) $16^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{2}}$

g) $16 \cdot 2^{5x+2} = 2^{x^2}$

d) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

dj) $\left(x^2+1\right)^{2x-3} = 1$

e) $9^{x^2-3x+5} = 3^6$

<u>Rešenja:</u>

a)

$$4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$$

$$(2^2)^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$$

$$2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{x+1}{x}$$

Kad napravimo iste osnove i njih "skratimo''!

$$2x^2 = x+1$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Rešenja su $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{2}$

b) $8^{x+1}=16\cdot 2^{x-2}$

$(2^3)^{x+1}=2^4\cdot 2^{x-2}$

$2^{3x+3}=2^{4+x-2}$

$2^{3x+3}=2^{x+2}$

$3x+3=x+2$

$3x-x=2-3$

$2x=-1$

$x=-\frac{1}{2}$

v) $16^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{x}{2}}$

$(2^4)^{\frac{1}{x}}=(2^2)^{\frac{x}{2}}$

$2^{4\cdot\frac{1}{x}}=2^{2\cdot\frac{x}{2}}$

$2^{\frac{4}{x}}=2^{x}$

$\frac{4}{x}=x$

$x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4}$

$x_1=2$

$x_2=-2$

g) $16\cdot 2^{5x+2}=2^{x^2}$

$2^4\cdot 2^{5x+2}=2^{x^2}$

$2^{4+5x+2}=2^{x^2}$

$2^{5x+6}=2^{x^2}$

$x^2=5x+6$

$x^2-5x-6=0$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 7}{2}$

$x_1=6$

$x_2=-1$

d) $9^{-3x}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

Pazi: $\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}=3^{-3}$

$(3^2)^{-3x}=(3^{-3})^{x+3}$

$3^{-6x}=3^{-3x-9}$

$-6x=-3x-9$

$-6x+3x=-9$

$-3x=-9$

$x=3$

đ) $(x^2+1)^{2x-3}=1$

Pošto znamo da je $a^o=1$, jedno rešenje će nam dati

$2x-3=0$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$

Drugo rešenje će biti ako je $x^2+1=1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$ jer važi $\boxed{a^{f(x)}=b^{f(x)}\Leftrightarrow a=b}$

tj. $(x^2+1)^{2x-3}=1^{2x-3}$ pa je $x^2+1=1$ to jest $x=0$

e) $9^{x^2-3x+5}=3^6$

$(3^2)^{x^2-3x+5}=3^6$

$3^{2x^2-6x+10}=3^6$

$2x^2-6x+10=6$

$2x^2-6x+4=0 / :2$

$x^2-3x+2=0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}$

$x_1=2$

$x_2=1$

2) Rešiti jednačine:

a) $2^{x+3}-7\cdot2^x-16=0$
b) $3^{x-1}-4\cdot3^x+33=0$
v) $2\cdot3^{x+1}-4\cdot3^{x-2}=450$
g) $2^{3x-2}-2^{3x-3}-2^{3x-4}=16$
d) $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-2}-3^{x-3}$

Rešenja:

Ovde ćemo koristiti pravila za stepenovanje:

$a^{m+n}=a^m\cdot a^n$

$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$

$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

a) $2^{x+3}-7\cdot2^x-16=0$

$2^x\cdot2^3-7\cdot2^x-16=0\rightarrow$ Najbolje da uzmemo smenu $2^x=t$

$t\cdot8-7\cdot t-16=0$

$8t-7t=16$

$t=16\rightarrow$ Vratimo se u smenu $2^x=t$

$2^x=16$

$2^x=2^4$

$x=4$

b) $3^{x-1}-4\cdot 3^{x}+33=0$

$\frac{3^{x}}{3}-4\cdot 3^{x}+33=0\rightarrow$ Smena $3^{x}=t$

$\frac{t}{3}-4t+33=0\rightarrow$ Pomnožimo sve sa 3

$t-12t+99=0$

$-11t=-99$

$t=9$

$3^{x}=9$

$3^{x}=3^{2}$

$x=2$

v) $2\cdot 3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=450$

$2\cdot 3^{x}\cdot 3^{1}-4\frac{3^{x}}{3^{2}}=450\rightarrow$ Smena $3^{x}=t$

$6\cdot t-4\frac{t}{9}=450$

$6t-\frac{4t}{9}=450\rightarrow$ Pomnožimo sve sa 9

$54t-4t=4050$

$50t=4050$

$t=\frac{4050}{50}$

$t=81$

$3^{x}=81\rightarrow$ pazi $81=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^{4}$

$3^{x}=3^{4}$

$x=4$

g) $2^{3x-2}-2^{3x-3}-2^{3x-4}=16$

$\frac{2^{3x}}{2^{2}}-\frac{2^{3x}}{2^{3}}-\frac{2^{3x}}{2^{4}}=16\rightarrow$ smena $2^{3x}=t$

$\frac{t}{4}-\frac{t}{8}-\frac{t}{16}=16\rightarrow$ sve pomnožimo sa 16

$4t-2t-t=256$

$t=256$

$2^{3x}=2^{8}$

$3x=8$

$x=\frac{8}{3}$

d) $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-2}-3^{x-3}$

$$\frac{2^x}{2}-\frac{2^x}{2^3}=\frac{3^x}{3^2}-\frac{3^x}{3^3}$$

$$\frac{2^x}{2}-\frac{2^x}{8}=\frac{3^x}{9}-\frac{3^x}{27}$$ $\rightarrow$ zajednički za levu stranu je 8 a za desnu 27

$$\frac{4\cdot 2^x-2^x}{8}=\frac{3\cdot 3^x-3^x}{27}$$

$$\frac{3\cdot 2^x}{8}=\frac{2\cdot 3^x}{27}$$ $\rightarrow$ Pomnožimo unakrsno

$$3\cdot 2^x\cdot 27=2\cdot 3^x\cdot 8$$

$2^x\cdot 81=3^x\cdot 16/$ podelimo sa 3^x i sa 81

$$\frac{2^x}{3^x}=\frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\boxed{x=4}$$

A mogli smo da razmišljamo i ovako:

$$2^x\cdot 81=3^x\cdot 16$$

$$2^x\cdot 3^4=3^x\cdot 2^4$$

Očigledno je $x=4$

3) Reši jednačine:

a) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$

b) $16^x-4^x-2=0$

v) $5^x-5^{3-x}=20$

g) $5^{2x-3}=2\cdot 5^{x-2}+3$

d) $(11^x-11)^2=11^x+99$

Rešenja:

a) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$

$4^x-5\cdot 2^x+4=0 \rightarrow$ Pošto je $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$ uzećemo smenu $2^x=t$ pa će onda biti $4^x=t^2$

$$t^2-5t+4=0$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}$$

$$t_1=4$$

$$t_2=1$$

Vratimo se sad u smenu: $2^x=4$, $2^x=2^2$, $x=2$ ili $2^x=1$, $x=0$

b) $16^x - 4^x - 2 = 0 \to$ smena je $4^x = t$ pa je $16^x = 4^{2x} = t^2$

$$t^2 - t - 2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$t_1 = 2$$
$$t_2 = -1$$

Vratimo se u smenu:

$$4^x = 2$$
$$2^{2x} = 2^1$$
$2x = 1$ ili $4^x = -1$ a ovde nema rešenja jer je $y = a^x$ uvek pozitivna!
$$x = \frac{1}{2}$$

v) $5^x - 5^{3-x} = 20$

$5^x - \frac{5^3}{5^x} = 20 \to$ smena $5^x = t$

$t - \frac{125}{t} = 20 \to$ celu jednačinu pomnožimo sa t

$$t^2 - 125 = 20t$$
$$t^2 - 20t - 125 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{20 \pm 30}{2}$$
$$t_1 = 25$$
$$t_2 = -5$$

Pa je $5^x = 25$ ili $5^x = -5$ Nema rešenja

$$5^x = 5^2$$
$$x = 2$$

g) $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$

$\frac{5^{2x}}{5^3} = 2 \cdot \frac{5^x}{5^2} + 3 \to$ smena $5^x = t$

$\frac{t^2}{125} = \frac{2t}{25} + 3 \to$ sve pomnožimo sa 125

$$t^2 = 10t + 375$$
$$t^2 - 10t - 375 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 40}{2}$$
$$t_1 = 25$$
$$t_2 = -15$$

Vratimo se u smenu:

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$ ili $5^x = -15$ nema rešenja $5^x > 0$

$x = 2$

d) $(11^x - 11)^2 = 11^x + 99 \rightarrow$ Ovde ćemo odmah uzeti smenu $11^x = t$

$$(t-11)^2 = t + 99$$
$$t^2 - 22t + 121 - t - 99 = 0$$
$$t^2 - 23t + 22 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{23 \pm 21}{2}$$
$$t_1 = 22$$
$$t_2 = 1$$

Vratimo se u smenu:

$11^x = 22$, $x = \log_{11} 22$ ili $11^x = 1$, $x = 0$

4) Rešiti jednačine:

a) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$

b) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 * 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

v) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$

Rešenja

a) Najpre odredimo oblast definisanosti, pošto je u zadatku data korena funkcija, to je $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Uzećemo smenu $2^{\sqrt{x-2}} = t \Rightarrow 4^{\sqrt{x-2}} = t^2$

$$t^2 + 16 = 10t$$
$$t^2 - 10t + 16 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$
$$t_1 = 8$$
$$t_2 = 2$$

Vratimo se u smenu :

$$2^{\sqrt{x-2}}=8 \qquad \text{ili} \qquad 2^{\sqrt{x-2}}=2$$

$$2^{\sqrt{x-2}}=2^3 \qquad\qquad \sqrt{x-2}=1$$

$$\sqrt{x-2}=3 \rightarrow \text{ kvadriramo} \qquad x-2=1$$

$$x-2=9 \qquad\qquad x=3$$

$$x=11$$

Kako za oba rešenja važi $x \geq 2$ to su oba rešenja “dobra’’

b) $$4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$$

$$(2^2)^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6$$

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})}-5\cdot\frac{2^{x+\sqrt{x^2-2}}}{2^1}=6$$

Smena $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=t$

$t^2-\dfrac{5t}{2}=6$ pomnožimo sa 2

$$2t^2-5t-12=0$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{5\pm 11}{4}$$

$$t_1=4$$

$t_2=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}\rightarrow$ nije rešenje

Vratimo se u smenu:

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4$$

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=2^2$$

$$x+\sqrt{x^2-2}=2$$

$\sqrt{x^2-2}=2-x\rightarrow$ uslovi $2-x\geq 0$ pa je $-x\geq -2$ tj $x\leq 2$ i $x^2-2\geq 0$

$x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$

$$x^2-2=(2-x)^2$$

$$x^2-2=4-4x+x^2$$

$$4x=4+2$$

$$4x=6$$

$$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$x=1{,}5\rightarrow$ Zadovoljava uslove

v) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$

pogledajmo prvo jednu stvar:

$$2-\sqrt{3}=\frac{2-\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2^2-\sqrt{3}^2}{2+\sqrt{3}}=\frac{4-3}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Dakle, zadatak možemo zapisati i ovako:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}^x}=4$$

smena $\sqrt{2+\sqrt{3}}^x=t$

$$t+\frac{1}{t}=4\rightarrow \text{ pomnožimo sve sa t}$$
$$t^2+1=4t$$
$$t^2-4t+1=0$$
$$t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{3}}{2}=\frac{2\left(2\pm\sqrt{3}\right)}{2}=2\pm\sqrt{3}$$
$$t_1=2+\sqrt{3}$$
$$t_2=2-\sqrt{3}$$

Vratimo se u smenu:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}^x=t,$ dakle

$\sqrt{2+\sqrt{3}}^x=2+\sqrt{3}$ ili $\sqrt{2+\sqrt{3}}^x=2-\sqrt{3}$

Kako važi $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ tj. $\sqrt[2]{a^x}=a^{\frac{x}{2}}$ imamo:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2+\sqrt{3}\right)^1$$
$$\frac{x}{2}=1$$
$$\boxed{x=2}$$

ili

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$
$$\frac{x}{2}=-1$$
$$\boxed{x=-2}$$

5) Reši jednačine:

a) $20^x - 6\cdot 5^x + 10^x = 0$
b) $6\cdot 9^x - 13\cdot 6^x + 6\cdot 4^x = 0$

a) $20^x - 6\cdot 5^x + 10^x = 0 \rightarrow$ iskoristićemo da je $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(5\cdot 4)^x - 6\cdot 5^x + (5\cdot 2)^x = 0$

$5^x \cdot 4^x - 6\cdot 5^x + 5^x \cdot 2^x = 0 \rightarrow$ izvucimo 5^x kao zajednički ispred zagrade !

$5^x(4^x - 6 + 2^x) = 0$

$5^x = 0 \quad \vee \quad 4^x + 2^x - 6 = 0$

$t^2 + t - 6 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-1\pm 5}{2}$

$t_1 = 2$

$t_2 = -3$

pa je $2^x = 2$, $\boxed{x=1}$ $\quad \vee \quad 2^x = -3$ nema rešenja

b) $6\cdot 9^x - 13\cdot 6^x + 6\cdot 4^x = 0$

$6\cdot 3^{2x} - 13\cdot 3^x \cdot 2^x + 6\cdot 2^{2x} = 0 \rightarrow$ celu jednačinu podelimo sa 2^{2x}

$6\cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - 13\cdot \frac{3^x}{2^x} + 6 = 0$

$6\cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13\cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$

Smena: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$

$6t^2 - 13t + 6 = 0$

$t_{1,2} = \frac{13\pm 5}{12}$

$t_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

$t_2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ ili $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$

$\boxed{x=1}$ $\qquad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

$\boxed{x=-1}$

6) Grafički rešiti sledeće jednačine

a) $2^x - 5 + \frac{x}{2} = 0$ b) $3^x - \frac{x}{2} - 8 = 0$

a) Najpre ćemo razdvojiti funkcije, eksponencijalnu na levu a ostalo na desnu stranu:

$$2^x = 5 - \frac{x}{2}$$

Nacrtaćemo funkcije $y = 2^x$ i $y = -\frac{x}{2} + 5$ i njihov presek će nam dati rešenje.

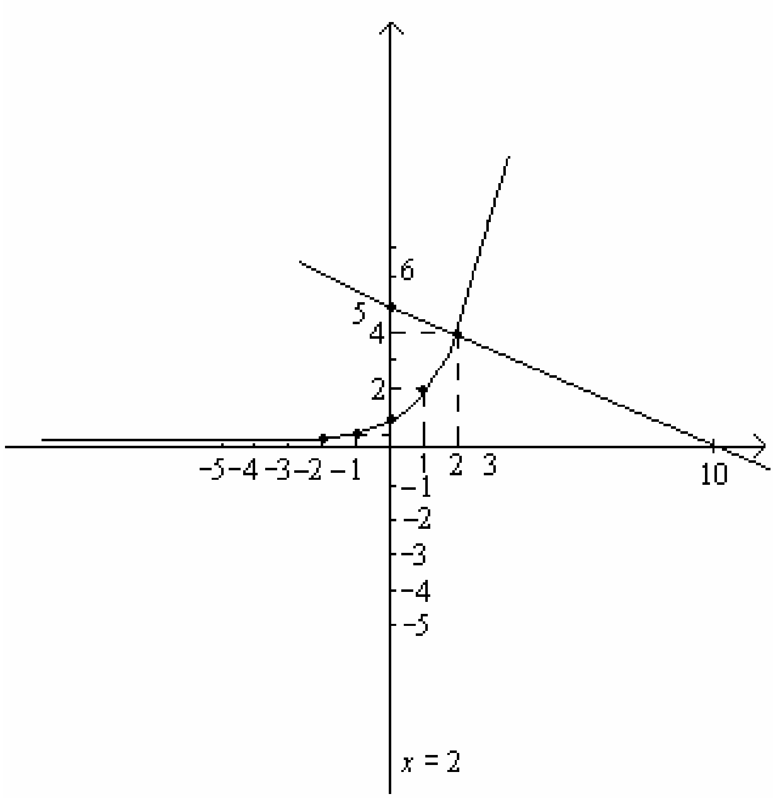
$y = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$y = -\frac{x}{2} + 5$

x	0	10	2
y	5	0	4

Na grafiku bi to izgledalo ovako:



Rešenje je $\boxed{x = 2}$

b) $3^x - \frac{x}{2} - 8 = 0$

$$3^x = \frac{x}{2} + 8$$

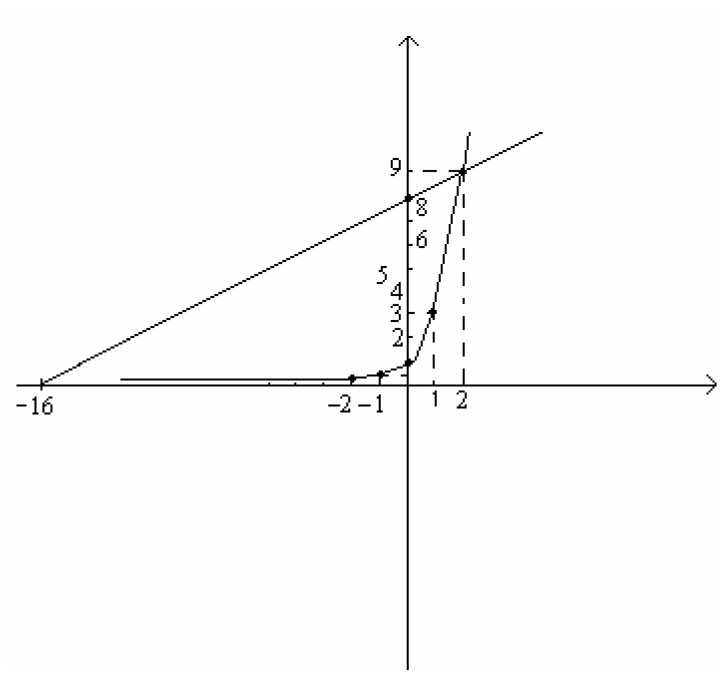
$y = 3^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

$y = \frac{x}{2} + 8$

x	0	-16	2
y	8	0	9

Na grafiku bi bilo:



Dakle, rešenje je $x = 2$.

Da li ovde ima još jedno rešenje?

DA, ali njega teško možemo naći baš precizno....(naučićemo kasnije i to)