Kvadratna jednačina

Jednačina oblika $\boxed{ax^2+bx+c=0}$, gde je $x-$nepoznata. a,b i c realni brojevi, $a \neq 0$, je kvadratna jednačina po x sa koeficijentima a,b i c.
Kvadratna jednačina je **potpuna** ako su koeficijenti $b \neq 0$ i $c \neq 0$.

Ako je $b=0$ ili $c=0$ (ili oba) onda je kvadratna jednačina **nepotpuna.**
Nepotpuna kvadratne jednačine se rešavaju relativno lako.

Nepotpune kvadratne jednačine:

$$ax^2+bx=0 \qquad x(ax+b)=0 \qquad x=0 \lor ax+b=0 \qquad x=-\frac{b}{a}$$

$$ax^2+c=0 \qquad ax^2=-c \qquad x^2=-\frac{c}{a} \qquad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$ax^2=0 \qquad x=0$$

Potpuna kvadratna jednačina: $ax^2+bx+c=0$

Kvadratna jednačina ima dva rešenja: označavamo ih sa x_1 i x_2 i tradicionalno se piše:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Priroda rešenja kvadratne jednačine

Diskriminanta (**D**) kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ je izraz b^2-4ac (ono pod korenom)
Dakle: $\boxed{D=b^2-4ac}$

Sada formulu za rešavanje možemo zapisati i kao: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Za kvadratnu jednačinu ax^2+bx+c sa realnim koeficijentima važi:

1) Jednačina ima dva različita realna rešenja ako i samo ako je $D>0$
($x_1=x_2 \quad \in R \quad x_1 \neq x_2$ **akko** $D>0$)

2) Jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje ako i samo ako je $D=0$
($x_1=x_2 \in R$ **akko** $D=0$)

3) Jednačina ima jedan par konjugovano kompleksnih rešenja akko je $D<0$
($x_1=a+bi, x_2=a-bi$ **akko** $D<0$)

www.matematiranje.in.rs

Kvadratna nejednačina

Kvadratne nejednačine su oblika:

$ax^2+bx+c>0$

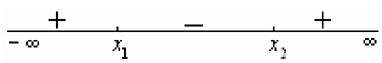
$ax^2+bx+c\geq 0$

$ax^2+bx+c<0$

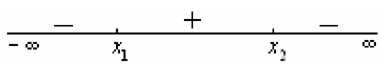
$ax^2+bx+c\leq 0$

gde je *x*-realna promenljiva (nepoznata) i *a,b,c* su realni brojevi, $a\neq 0$.

U delu kvadratna funkcija smo analizirali kako može izgledati grafik kvadratne funkcije u zavisnosti od znaka *a* i *D*. Podsetimo se:

1) $a>0, D>0\Rightarrow$ 

2) $a>0, D=0\Rightarrow y\geq 0$ uvek
3) $a>0, D<0\Rightarrow y>0$ uvek

4) $a<0, D>0\Rightarrow$ 

5) $a<0, D=0\Rightarrow y\leq 0$ uvek
6) $a<0, D<0\Rightarrow y<0$ uvek

Naravno $y=ax^2+bx+c$

Vietove formule

Brojevi x_1 i x_2 su rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ ako i samo ako je

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad \text{i} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Ove dve jednakosti zovu se <u>Vietove formule</u>.

$a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]=0$ je formula za pravljenje kvadratne jednačine kad su nam data rešenja.

Ako krenemo od poznate formule za kvadrat binoma: $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

dobijamo: $\boxed{x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}$ **<u>ZAPAMTI</u>** (ovo se često traži u zadacima)

Rastavljanje kvadratnog trinoma na činioce

Kvadratni trinom po *x* je izraz oblika: ax^2+bx+c gde su $a,b,c\rightarrow$ brojevi i $a\neq 0$. Brojevi a,b i c su koeficijenti kvadratnog trinoma.

Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ onda je:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Često nam za zadatke treba i:

1) Rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine sa realnim koeficijentima su:

<u>realna</u> i <u>pozitivna</u> $\Leftrightarrow D \geq 0, \frac{b}{a} < 0, \frac{c}{a} > 0$

2) Rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine sa realnim koeficijentima su:

<u>realna</u> i <u>negativna</u> $\Leftrightarrow D \geq 0, \frac{b}{a} > 0, \frac{c}{a} > 0$

Ova razmišljanja (teoreme) proizilaze iz Vietovih pravila:

$\rightarrow$ Da bi rešenja bila realna je $D \geq 0$

$\rightarrow$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

1) x_1 i x_2 pozitivna $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0$

$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

2) x_1 i x_2 negativna $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0$

$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

(minus puta minus je plus)

Kvadratna funkcija

Često funkciju $y = ax^2 + bx + c$ treba svesti na takozvani <u>kanonski oblik.</u>
Tu nam pomaže formula:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ili ako uvedemo da je:

$\alpha = -\frac{b}{2a}$ i $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ tj. $\beta = -\frac{D}{4a}$ dobijamo: $\boxed{y = a(x-\alpha)^2 + \beta}$ ***kanonski oblik***

Tačka $T(\alpha, \beta)$ je teme parabole.

Postupak za ispitivanje toka I crtanje grafika kvadratne funkcije:

1) Najpre odredimo a,b,c i nadjemo diskriminantu $D = b^2 - 4ac$
2) Tražimo $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (ako ima)

   $D > 0, x_1 \neq x_2$

   $D = 0, x_1 = x_2$

   $D < 0,$ nema x_1, x_2

3) U zavisnost od znaka broja a zaključujemo da li je parabola okrenuta otvorom nagore ili na dole, tj:

   $a > 0 \rightarrow$ smeje se 

   $a < 0 \rightarrow$ mršti se 

4) Parabola uvek seče y-osu u tački (0, c)
5) Nadjemo teme $T(\alpha, \beta)$ $\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = -\frac{D}{4a}$

   $T(\alpha, \beta)$ je max ako je $a < 0$

   $T(\alpha, \beta)$ je min ako je $a > 0$

6) Konstruišemo grafik

Neke jednačine koje se svode na kvadratne

Bikvadratna jednačina

To je jednačina oblika: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ Uvodimo smenu $x^2 = t$, dobijamo jednačinu $at^2 + bt + c = 0$, nadjemo $t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ i vratimo se u smenu:

$$x^2 = t_1 \quad \text{i} \quad x^2 = t_2$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} \quad \text{i} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$$

Binomne jednačine

To su jednačine oblika:

$$Ax^n \pm B = 0$$

gde su $A > 0$ i $B > 0$

Najpre pokušamo da datu jednačinu rastavimo na činioce upotrebom poznatih formula, pa koristimo $M \cdot N = 0 \Leftrightarrow M = 0$ ili $N = 0$

Uvek ovu jednačinu možemo rešiti smenom $x = y\sqrt[n]{\dfrac{B}{A}}$, koja binomnu jednačinu svede na oblik $y^n \pm 1 = 0$

Trinomne jednačine

To su jednačine oblika

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

gde su a, b i c realni brojevi (različite od nule).
Rešava se smenom $x^n = t \Rightarrow x^{2n} = t^2$. Rešavamo kvadratnu po t, pa se vratimo u smenu.

Simetrične (recipročne) jednačine

To su jednačina oblika:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$$

Gde su $a, b, c\ldots$ realni brojevi. Naziv <u>simetrične</u> potiče jer su koificijenti uz x^{n-k} i x^k $(k = 0,1,2\ldots n)$ jednaki.

Drugo ime <u>recipročne</u> su dobile zbog osobina: Ako je $x=\alpha$ jedno rešenje, onda je i $x=\dfrac{1}{\alpha}$ takodje rešenje date jednačine i <u>važi osobina:</u> Ako je najveći stepen $n-$ neparan broj, tada je $x_1=-1$ jedno rešenje simetrične jednačine!!!

Postupak rešavanja

- Ako je jednačina neparnog stepena podelimo je sa $(x+1)$ i dobijemo jednačinu parnog sistema

- Celu jednačinu podelimo sa "srednjim'' članom i grupišemo odgovarajuće članove.

- Uzimamo smenu $\boxed{x+\dfrac{1}{x}=t}$, ovde kvadriramo i dobijamo:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2$$
$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2$$
$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2\rightarrow \textbf{ZAPAMTI}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=t^3$$
$$x^3+2x^2\cdot\frac{1}{x}+3x+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=t^3$$
$$x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=t^3$$
$$x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=t^3$$
$$\boxed{x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t}\rightarrow \underline{\textbf{ZAPAMTI}}$$

Veoma slične simetričnim su KOSOSIMETRIČNE jednačine, one su oblika $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots-cx^2-bx-a=0$ tj. koeficijenti uz x^k i x^{n-k} su suprotni koeficijenti

Ako je kososimetrična jednačina neparnog sistema, jedno rešenje je uvek $x_1=1$
Postupak rešavanja je sličan!