Korenovanje (krugova zbirka)

Tražili ste od nas da uradimo i objasnimo nekoliko primera iz krugove zbirke za II razred. Ovi primeri su baš teži pa najpre proučite prethodni fajl o korenovanju da bi naučili pravila i kako se rade osnovni zadaci. Naravno, neophodno je i znanje iz I godine o rastavljanju na činioce i operacije sa racionalnim algebarskim izrazima.

Primer 1.

Izračunaj vrednost izraza $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}=?$ za $a = 1,2$ i $b = \dfrac{3}{5}$

Rešenje:

Prvo malo uprostimo dati izraz, pa zamenimo date vrednosti.

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\frac{a^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{a-b}}{\underbrace{a\sqrt{a}}_{\substack{a\text{ ubacimo}\\ \text{pod koren}}}-\underbrace{b\sqrt{b}}_{\substack{b\text{ ubacimo}\\ \text{pod koren}}}}=$$

$$\frac{\overbrace{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3}^{\text{zbir kubova}}}{\sqrt[3]{(a(a-b))^2}}:\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt[3]{a-b}}{\underbrace{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}_{\text{razlika kubova}}}=$$

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a^2}-\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b^2})}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{(a-b)^2}}\cdot\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a^2}+\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b^2})}{\frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt[3]{a^2}}}=\text{pokratimo }\sqrt[3]{a^2}$$

$$=\frac{\overbrace{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}^{\text{razlika kvadrata}}(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b)(a+\sqrt{a}\sqrt{b}+b)}{\sqrt[3]{(a-b)^3}}$$

$$=\frac{(a-b)(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b)(a+\sqrt{a}\sqrt{b}+b)}{(a-b)}$$

$$=(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b)(a+\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$$

$$=a^2+a\sqrt{a}\sqrt{b}+ab-a\sqrt{a}\sqrt{b}-ab-b\sqrt{a}\sqrt{b}+ab+b\sqrt{a}\sqrt{b}+b^2$$

$$=a^2+ab+b^2$$

Sad zamenimo vrednosti

$$a^2+ab+b^2=1,2^2+1,2\cdot0,6+0,6^2=1,44+0,72+0,36=2,52$$

Primer 2.

Uprosti uzraz $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=$ za $x\neq 0 \wedge x\neq 1$

Rešenje:

Već smo se upoznali sa idejom da uzimamo smenu. U ovom primeru će baš pomoći.

smena $\sqrt{x}=t \rightarrow x=t^2 \wedge x^2=t^4$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=$$
$$\frac{t+1}{t^2\cdot t+t^2+t}:\frac{1}{t^4-t}=$$
$$\frac{t+1}{t^3+t^2+t}:\frac{1}{t^4-t}=$$
$$\frac{t+1}{t(t^2+t+1)}\cdot\frac{t(t^3-1)}{1}= \text{ skratimo t}$$
$$\frac{t+1}{t^2+t+1}\cdot\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{1}=\text{skratimo } t^2+t+1$$
$$(t+1)(t-1)=t^2-1$$

Vratimo smenu $t^2-1=x-1$

E sad šta ako profesor ne dozvoljava smenu?

Morali bi da se ovako snalazimo: stavimo da je $x=\sqrt{x^2}$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=$$
$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x}}:\frac{1}{\sqrt{x}^4-\sqrt{x}}=$$
$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2}+\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{\sqrt{x}\overbrace{(\sqrt{x^3}-1)}^{\text{razlika kubova}}}{1}=\text{skratimo } \sqrt{x}$$
$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x}+1}\cdot\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2}+\sqrt{x}+1)}{1}=\text{skratimo } (\sqrt{x^2}+\sqrt{x}+1)$$
$$=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=x-1$$

Primer 3.

Uprosti uzraz $\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1$ za $x\neq 0$

Rešenje:

Uzećemo smenu $x^{\frac{1}{4}}=t\rightarrow x^{\frac{1}{2}}=t^2\wedge x=t^4$ i više nema korena....

$$\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1$$

$$\frac{t^4-1}{t^3+t^2}\cdot\frac{t^2+t}{t^2+1}\cdot t+1=$$

$$\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2(t+1)}\frac{t(t+1)}{t^2+1}\cdot t+1=\text{skratimo sve šta možemo}$$

$$t^2-1+1=t^2=\sqrt{x}\ \text{(kad vratimo smenu)}$$

Ako bi radili direktno morali bi da pišemo: $x=\sqrt[4]{x^4}\wedge x^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{x^2}$ pa onda sličan postupak.

Primer 4.

Dokazati identitet $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}-\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}=0$ za $x\neq 0\wedge x\neq 1$

Rešenje:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}-\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}=$$

Uzećemo smenu $x^{\frac{1}{3}}=t$

$$\frac{t^2}{t^2-t^{-1}}+\frac{t^4}{t^4-t}-\frac{2t}{t-t^{-2}}=$$

$$\frac{t^2}{t^2-\frac{1}{t}}+\frac{t^4}{t(t^3-1)}-\frac{2t}{t-\frac{1}{t^2}}=$$

$$\frac{t^2}{\frac{t^3-1}{t}}+\frac{t^3}{t^3-1}-\frac{2t}{\frac{t^3-1}{t^2}}=\frac{t^3}{t^3-1}+\frac{t^3}{t^3-1}-\frac{2t^3}{t^3-1}=\frac{2t^3}{t^3-1}-\frac{2t^3}{t^3-1}=0$$

Primer 5.

Uprosti uzraz $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{x+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}\right)=$ za $x,y>0\wedge x\neq y$

Rešenje:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-1}{x+\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2\sqrt{xy}}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}\right)=$$

Ajmo da probamo da uzmemo dve smene:

$\sqrt{x}=a\to x=a^2$

$\sqrt{y}=b\to y=b^2$

$$\frac{a+b-1}{a^2+ab}+\frac{a-b}{2ab}\cdot\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{b}{a^2+ab}\right)=$$

$$\frac{a+b-1}{a(a+b)}+\frac{a-b}{2ab}\cdot\left(\frac{b}{a(a-b)}+\frac{b}{a(a+b)}\right)=$$

$$\frac{a+b-1}{a(a+b)}+\frac{a-b}{2ab}\cdot\left(\frac{b(a+b)+b(a-b)}{a(a-b)(a+b)}\right)=\frac{a+b-1}{a(a+b)}+\frac{a-b}{2ab}\cdot\left(\frac{ab+b^2+ab-b^2}{a(a-b)(a+b)}\right)=$$

$$\frac{a+b-1}{a(a+b)}+\frac{a-b}{2ab}\cdot\left(\frac{2ab}{a(a-b)(a+b)}\right)=\frac{a+b-1}{a(a+b)}+\frac{1}{a(a+b)}=\frac{a+b}{a(a+b)}=\frac{1}{a}$$

Još da vratimo smenu: $\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$

Primer 6.

Uprosti uzraz $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}-\dfrac{1}{\sqrt{p^3}+\sqrt{q^3}}:\dfrac{1}{p+\sqrt{pq}+q}\right]\cdot\dfrac{p-q}{2p}+\dfrac{1}{p+\sqrt{p}}=$ za $p,q>0$

Rešenje:

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{p^3}-\sqrt{q^3}}}_{\text{razlika kubova}}:\frac{1}{p+\sqrt{pq}+q}\right]\cdot\frac{p-q}{2p}+\frac{1}{p+\sqrt{p}}=$$

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}-\frac{1}{(\sqrt{p}-\sqrt{q})(p+\sqrt{pq}+q)}\cdot\frac{p+\sqrt{pq}+q}{1}\right]\cdot\frac{p-q}{2p}+\frac{1}{p+\sqrt{p}}=\text{pokratimo}(p+\sqrt{pq}+q)$$

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}-\frac{1}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}\right]\cdot\frac{p-q}{2p}+\frac{1}{p+\sqrt{p}}=$$

$$\frac{-(\sqrt{p}-\sqrt{q})-(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\sqrt{p}-\sqrt{q})}\cdot\frac{p-q}{2p}+\frac{1}{p+\sqrt{p}}=$$

$$\frac{-\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{p}-\sqrt{q}}{p-q}\cdot\frac{p-q}{2p}+\frac{1}{p+\sqrt{p}}=\text{pokratimo }\ p-q,\ \text{potiremo }\sqrt{q}$$

$$\frac{-2\sqrt{p}}{2p}+\frac{1}{p+\sqrt{p}}=\frac{-1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{p^2}+\sqrt{p}}=\frac{-1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+1)}=\frac{-\sqrt{p}-1+1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+1)}=\frac{-1}{\sqrt{p}+1}$$

Primer 7.

Uprosti uzraz $\left(1+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=$ za $0<a<b$

Rešenje:

$$\left(1+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(1+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(1+\left(\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(1+\left(\frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(1+\left(\frac{a-b}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\left(\frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}}{a-b}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{4ab}{(a-b)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{(a-b)^2+4ab}{(a-b)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\frac{a^2-2ab+b^2+4ab}{(a-b)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{(a-b)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}}$$

Sad moramo da pazimo da nas “ ne ulove” na kraju!!

U postavci zadatka kaže da je $0<a<b$ a mi znamo da je $\sqrt{\Theta^2}=|\Theta|$

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}}=\frac{a+b}{b-a}$$