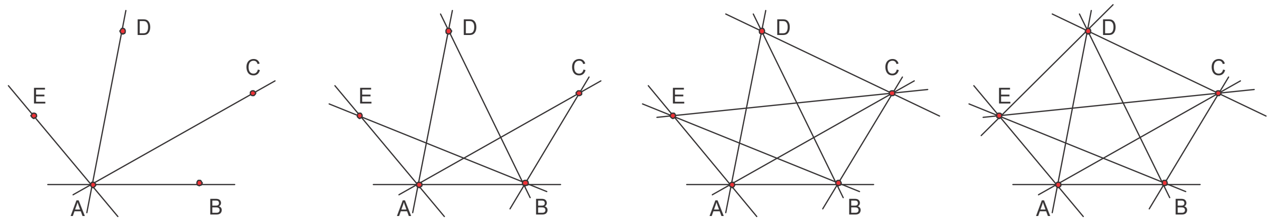
1. **Neka su A,B,C,D,E pet tačaka jedne ravni od kojih ni jedna trojka nije kolinearna.**

   a) **Koliko pravih je odredjeno ovim tačkama?**
   b) **Koliko trouglova je odredjeno ovim tačkama?**

Rešenje:

a) Znamo da dve različite tačke odredjuju jednu pravu.



Slika 1.   Slika 2.   Slika 3.   Slika 4.

Najbolje je da krenemo redom, kroz A imamo: p(A,B), p(A,C), p(A,D), p(A,E)   na slici 1.

Sad više tačku A ne uzimamo, pa kroz B imamo : p(B,C), p(B,D), p(B,E) na slici 2.

Dalje kroz C imamo (sa A i B smo završili) : p(C,D), p(C,E) na slici 3.

I konačno, kroz D imamo još pravu p(D,E) na slici 4.

Sve ukupno dakle ima 10 pravih.

Za one koji su učili kombinatoriku, izračunavanje je mnogo lakše.

Broj tačaka ćemo obeležiti sa *n*, radi se o kombinacijama, jer nam nije bitan redosled elemenata, odnosno prava p(A,B) i prava p(B,A) je jedna te ista stvar , pa se broj pravih izračunava po formuli $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Za našu situaciju je n=5, pa je $C_2^5 = \frac{5(5-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

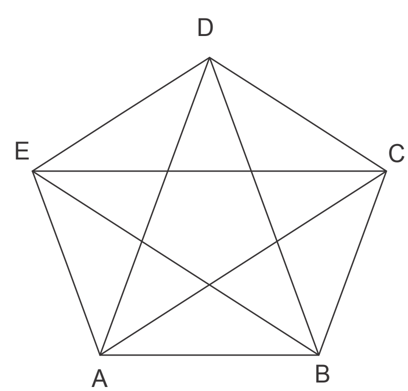
b) Najpre ćemo broj trouglova prebrojati na slikama, a onda videti i preko formule….

Krenemo sa A: $\triangle$ ABC, $\triangle$ ABD, $\triangle$ ABE, $\triangle$ ACD, $\triangle$ ACE, $\triangle$ ADE

Sad smo završili sa A, pa dalje imamo: $\triangle$ BCD, $\triangle$ BCE, $\triangle$ BDE

I sa B smo završili, pa još ostaje : $\triangle$ CDE

Ukupno ima dakle 10 trouglova.



Sa kombinatorikom bi opet išlo lakše, broj trouglova od n datih tačaka računamo:

$$C_3^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

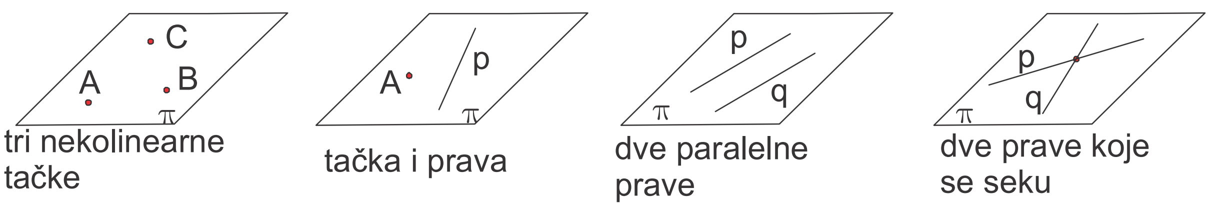
Za naš zadatak bi bilo: $C_3^5 = \frac{5(5-1)(5-2)}{6} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$

2. **Date su dve paralelne prave a i b i četiri nekolinearne tačke A,B,C,D koje ne pripadaju datim pravama. Koliko različitih ravni je na ovaj način odredjeno?**

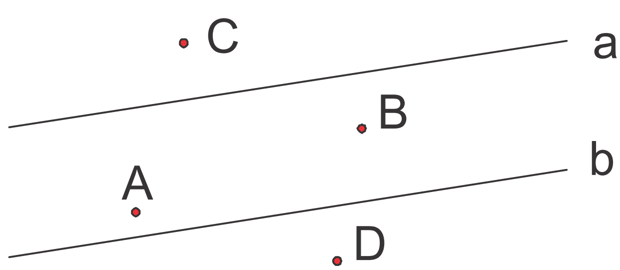
Rešenje:

Najbolje je da kad odredjujemo ravni postujemo sledeće 4 mogućnosti:

Ravan je odredjena sa:



Da skiciramo naš problem….



Razmišljamo najpre koliko je ravni odredjeno sa ove 4 nekolinearne tačke:

$\pi_1(A,B,C)$
$\pi_2(A,B,D)$
$\pi_3(A,C,D)$
$\pi_4(B,C,D)$

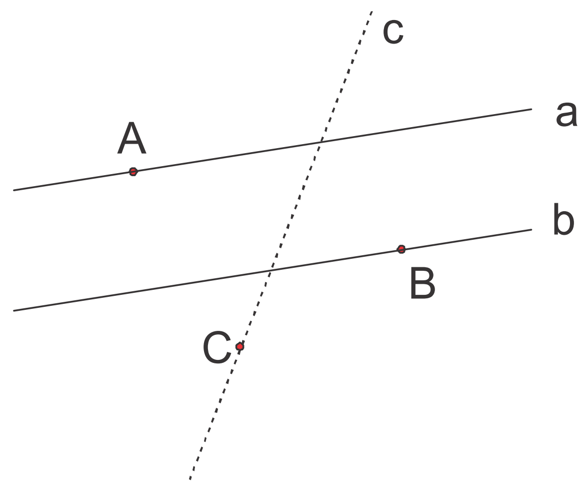
Dalje razmišljamo koliko je ravni odredjeno sa tačkom i pravom :

$\pi_5(A,p)$ $\quad$ $\pi_9(A,q)$
$\pi_6(B,p)$ $\quad$ $\pi_{10}(B,q)$
$\pi_7(C,p)$ $\quad$ $\pi_{11}(C,q)$
$\pi_8(D,p)$ $\quad$ $\pi_{12}(D,q)$

Dve paralelne prave daju još jednu ravan: $\pi_{13}(a,b)$ a zadnju opciju sa dve prave koje se seku nemamo.

Dakle , ukupno je na ovaj način odredjeno 13 različitih ravni.

3. Prave a i b mimoilaze se sa pravom c a medjusobno su paralelne. Ako su tačke A,B i C takve da $A \in a, B \in b, C \in c$, koliko je ravni na ovaj način odredjeno?



Rešenje:

Ovde moramo voditi računa da ne pišemo dva puta jednu istu ravan.

Prva ravan je $\pi_1(A,B,C)$,odredjena tačkama A,B,C.

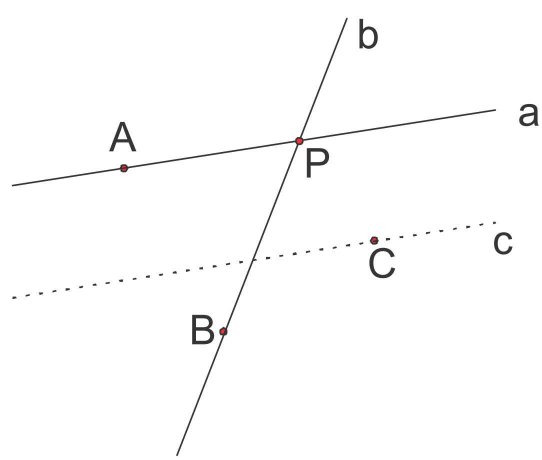
Sad idemo na tačku i pravu:

$\pi_2(a,C), \pi_3(b,C), \pi_4(c,A), \pi_5(c,B)$

I na kraju dve paralelne prave daju ravan: $\pi_6(a,b)$

Dakle, odredjeno je 6 ravni.

4. Prave a i b seku se u tački P. Prave a i c su paralelne, prave b i c mimoilazne.Ako su tačke A,B i C takve da je $A \in a, A \neq P$ i $B \in b, B \neq P$, a $C \in c$, kolko je ravni na ovaj način odredjeno?



Rešenje:

I ovde vodimo računa da ne dupliramo ravni…..

$\pi_1(A,B,C)$ je prva ravan, odredjena tačkama A,B,C.

$\pi_2(a,C), \pi_3(b,C), \pi_4(c,B)$ su ravni sa tačkom i pravom

$\pi_5(a,b)$ je ravan sa odredjena sa 2 prave koje se seku.

Ukupno imamo dakle 5 ravni.

Naravno, Vi se sada pitate gde je recimo ravan odredjena sa pravama a i c?

Pa tu smo pravu već uzeli kao ravan $\pi_2(a,C)$. Pazite na ovo….

5. Koji je najmanji broj tačaka kojima je odredjeno 36 pravih?

Rešenje:

Već smo rekli da se broj pravih računa po formuli $C_2^n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Sad imamo ukupan broj pravih:

$$C_2^n = 36$$
$$36 = \frac{n(n-1)}{2}$$
$$n(n-1) = 36 \cdot 2$$
$$n(n-1) = 72$$

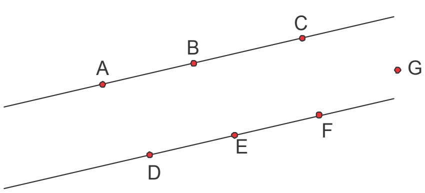
Rešavanje ove jednačine se detaljno uči u II godini, a mi sada možemo razmišljati ovako:

n(n-1) je proizvod dva uzastopna prirodna broja, i direktnom proverom zaključimo da je n = 9, jer je 9*8=72

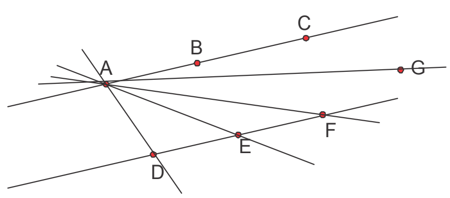
Dakle, broj tačaka je 9.

6. U skupu tačaka {A,B,C,D,E,F,G} postoje tačno dve trojke kolinernih tačaka. Koliko najviše pravih mogu odrediti tačke ovog skupa?

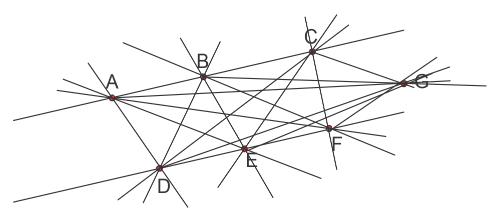
Rešenje:



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

Na slici 1. smo postavili problem I tu već imamo dve prave p(A,B,C) i p(D,E,F)
Sad idemo redom i pravimo prave kroz tačku A(slika 2.) pa kroz B itd.
p(A,D), p(A,E), p(A,F), p(A,G)
p(B,D), p(B,E), p(B,F), p(B,G)
p(C,D), p(C,E), p(C,F), p(C,G)

I da ne zaboravimo p(D,G), p(E,G), p(F,G).
Dakle ukupno ima 2+12+3=17 pravih

Kako bi ovaj zadatak mogli da rešimo na drugi način?

Najpre bi odredili ukupan broj pravih , a kako je dato 7 tačaka , to bi bilo:

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} \to C_2^7 = \frac{7(7-1)}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Sad razmišljamo ovako : Ako imamo tri tačke koje su kolinearne i nekolinearne, kolika je razlika u broju pravih?

Ako su tačke kolinearne, one daju samo 1 pravu.

Ako su nekolinearne, one daju :

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} \to C_2^3 = \frac{3(3-1)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

To su prave p(A,B), p(A,C), p(B,C).

Zaključujemo da trojka kolinearnih tačaka daje 2 prave manje nego li kad su nekolinearne!

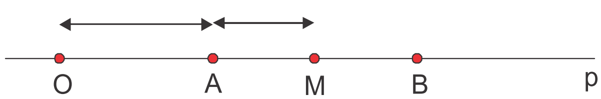
U našem zadatku imamo dve trojke nekolinearnih tačaka, pa imamo dakle 4 prave manje: 21-4=17

7. Tačke O,A,M i B pripadaju pravoj p. Dokazati da je :

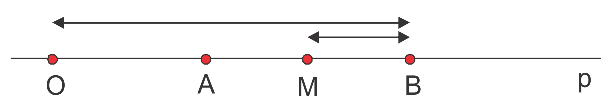
$$(AM = MB \wedge O - A - M - B) \Rightarrow OM = \frac{1}{2}(OA + OB)$$

Rešenje:

Da najpre nacrtamo skicu i postavimo problem.....



OM=OA+AM



OM=OB-MB

Ideja je da duž OM izrazimo na dva načina, što je prikazano na slikama.
Sad ove dve jednakosti saberemo:

$$\left.\begin{array}{l} OM = OA + AM \\ OM = OB - BM \end{array}\right\} +$$

$$2OM = OA + OB + AM - BM \to \text{dato nam je da je AM=BM}$$

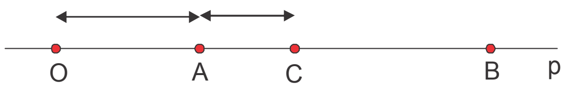
$$2OM = OA + OB \cancel{+AM} \cancel{-BM}$$

$$2OM = OA + OB \to \boxed{OM = \frac{1}{2}(OA + OB)}$$

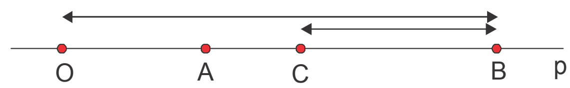
8. Ako su A,B,C i O tačke prave p , dokazati implikaciju:

$$(O-A-C-B \wedge CB = 2AC) \Rightarrow OC = \frac{2OC+OB}{3}$$

Rešenje:



OC = OA+AC



OC = OB - BC

Saberemo ove dve jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} OC &= OA + AC \\ OC &= OB - CB \end{aligned}\right\} +$$

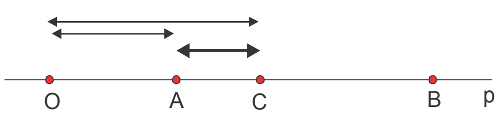
$$2OC = OA + OB + AC - CB$$

Dato nam je da je CB=2AC

$$2OC = OA + OB + AC - 2AC$$

$$2OC = OA + OB - AC$$

Sad razmišljamo kako možemo izraziti AC:



AC = OC-OA

$$2OC = OA + OB - AC$$

$$2OC = OA + OB - (OC - OA)$$

$$2OC = OA + OB - OC + OA$$

$$2OC + OC = 2OA + OB$$

$$3OC = 2OA + OB \rightarrow \boxed{OC = \frac{2OA+OB}{3}}$$

www.matematiranje.in.rs