

DIREKTNA I OBRNUTA PROPORCIONALNOST

Količnik brojeva a i b , to jest broj $a : b = \frac{a}{b}$ naziva se razmerom brojeva a i b .

Proporcija je jednakost dve razmere $a : b = c : d$ i rešava se tako što se pomnože “spoljašnji sa spoljašnjim” a “unutrašnji sa unutrašnjim” članom proporcije:

$$\begin{array}{c}
 \curvearrowright \\
 a : b = c : d \\
 \curvearrowleft \\
 ad = bc
 \end{array}$$

Primer 1.

Ako je za 5 kg krompira plaćeno 120 dinara, koliko košta 7 kg krompira?

Rešenje:

Najpre zapišemo podatke (kao na slici 1.):

$$\begin{array}{l}
 5\text{kg} \dots\dots\dots 120\text{din} \\
 7\text{kg} \dots\dots\dots x \text{ din}
 \end{array}$$

slika 1.

$$\begin{array}{l}
 5\text{kg} \dots\dots\dots \uparrow 120\text{din} \\
 7\text{kg} \dots\dots\dots \uparrow x \text{ din}
 \end{array}$$

slika 2.

$$\begin{array}{l}
 \uparrow 5\text{kg} \dots\dots\dots \uparrow 120\text{din} \\
 \uparrow 7\text{kg} \dots\dots\dots \uparrow x \text{ din}
 \end{array}$$

slika 3.

Uvek napišemo strelicu od x na gore! (slika 2.)

E sad razmišljamo: Da li je x veći ili manji od gornjeg broja? Dakle, ne zanima nas za sad koji je to broj, već samo da li je veći ili manji od gornjeg broja.

Ako 5kg koštaju 120 dinara, onda zaključujemo da 7kg koštaju više dinara. To znači da naša strelica na slici 2. ide od

“većeg ka manjem broju” pa tako udarimo i drugu strelicu, od 7kg ka 5kg (slika 3.)

Sad pratimo smer strelica i napravimo proporciju (uvek krenite od x da bi vam bilo lakše):

$$x : 120 = 7 : 5$$

$$5x = 120 \cdot 7 \text{ Savet: uvek prvo izrazite nepoznatu, da bi eventualno skratili....}$$

$$x = \frac{120 \cdot 7}{5}$$

$$\boxed{x = 168 \text{ din}}$$

Primer 2.

Ako dnevno radi 7 časova, jedan radnik posao završi za 15 dana. Koliko časova dnevno bi radnik trebalo da radi da bi isti posao završio za 12 dana?

Rešenje:

Opet najpre zapišemo podatke (slika 1.)

7 čas.....15 dana
x čas.....12 dana

slika 1.

↑ 7 čas.....15 dana
↑ x čas.....12 dana

slika 2.

↑ 7 čas.....↓15 dana
↑ x čas.....↓12 dana

slika 3.

Napišemo strelicu od x na gore (slika 2.)

Sad razmišljamo: Da li je x veći ili manji od gornjeg broja?

15 dana bi radili ako radimo po 7 časova, a ako hoćemo da radimo 12 dana, onda logično moramo dnevno da radimo više časova. Dakle, zaključili smo da strelica ide od “većeg ka manjem broju” pa tako udarimo i drugu strelicu, od 15 dana ka 12 dana.

Sad pratimo smer strelica:

$$x : 7 = 15 : 12$$

$$12x = 7 \cdot 15$$

$$x = \frac{7 \cdot \cancel{15}^5}{\cancel{12}^4}$$

Čas ima 60 minuta, a $\frac{3}{4}$ časa su 45 minuta.

$$x = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4} \text{ časova}$$

$$x = 8 \text{ časa } 45 \text{ minuta}$$

Primer 3.

Od 66 kg prediva dobije se 165 metara tkanine. Koliko se metara tkanine dobije od 112 kg prediva?

Rešenje:

66kg.....165m
112kg.....x m

slika 1.

66kg.....↑165m
112kg.....↑x m

slika 2.

↑66kg.....↑165m
↑112kg.....↑x m

slika 3.

Sad pratimo strelice i napravimo proporciju:

$$x : 165 = 112 : 66$$

$$66x = 112 \cdot 165$$

$$x = \frac{112 \cdot 165}{66}$$

$$\boxed{x = 280m}$$

Primer 4.

Zupčanik ima 54 zupca i pravi 84 obrtaja u minutu . Koliko zupca ima zupčanik ako pravi 126 obrtaja i u prenosu je sa prvim?

Rešenje:

Ako su zupčanici u prenosu jedan s drugim, jasno je da se jedan okreće na jednu a drugi na suprotnu stranu.

$$\begin{array}{l} 54 \text{ zub} \dots\dots\dots 84 \text{ obr.} \\ x \text{ zub} \dots\dots\dots 126 \text{ obr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow 54 \text{ zub} \dots\dots\dots 84 \text{ obr.} \\ \uparrow x \text{ zub} \dots\dots\dots 126 \text{ obr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow 54 \text{ zub} \dots\dots\dots \downarrow 84 \text{ obr.} \\ \uparrow x \text{ zub} \dots\dots\dots \downarrow 126 \text{ obr.} \end{array}$$

$$x : 54 = 84 : 126$$

$$126x = 84 \cdot 54$$

$$x = \frac{84 \cdot 54}{126}$$

$$\boxed{x = 36 \text{ zubaca}}$$

Primer 5.

Jedna prostorija je osvetljena sa 15 sijalica od 60 W. Koliko bi sijalica od 75 W davalo isto osvetljenje?

Rešenje:

Pazi: Ako uzmemo jače sijalice, manji broj će davati isto osvetljenje!

$$\begin{array}{l} 15 \text{ sij} \dots\dots\dots 60 \text{ W} \\ x \text{ sij} \dots\dots\dots 75 \text{ W} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow 15 \text{ sij} \dots\dots\dots 60 \text{ W} \\ \uparrow x \text{ sij} \dots\dots\dots 75 \text{ W} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow 15 \text{ sij} \dots\dots\dots \downarrow 60 \text{ W} \\ \uparrow x \text{ sij} \dots\dots\dots \downarrow 75 \text{ W} \end{array}$$

$$x : 15 = 60 : 75$$

$$75x = 15 \cdot 60$$

$$x = \frac{15 \cdot 60}{75}$$

$$\boxed{x = 12 \text{ sijalica}}$$

Primer 6.

Radeći dnevno po 8 časova ,28 radnika za 17 dana asfaltiraju 5440 metara puta. Koliko dana će raditi 42 radnika na sledećoj deonici puta, dužine 5040 metara radeći dnevno po 7 časova.

Rešenje:

Ovde se radi o takozvanoj produženoj proporciji i postoje više načina da se reši zadatak.

I način

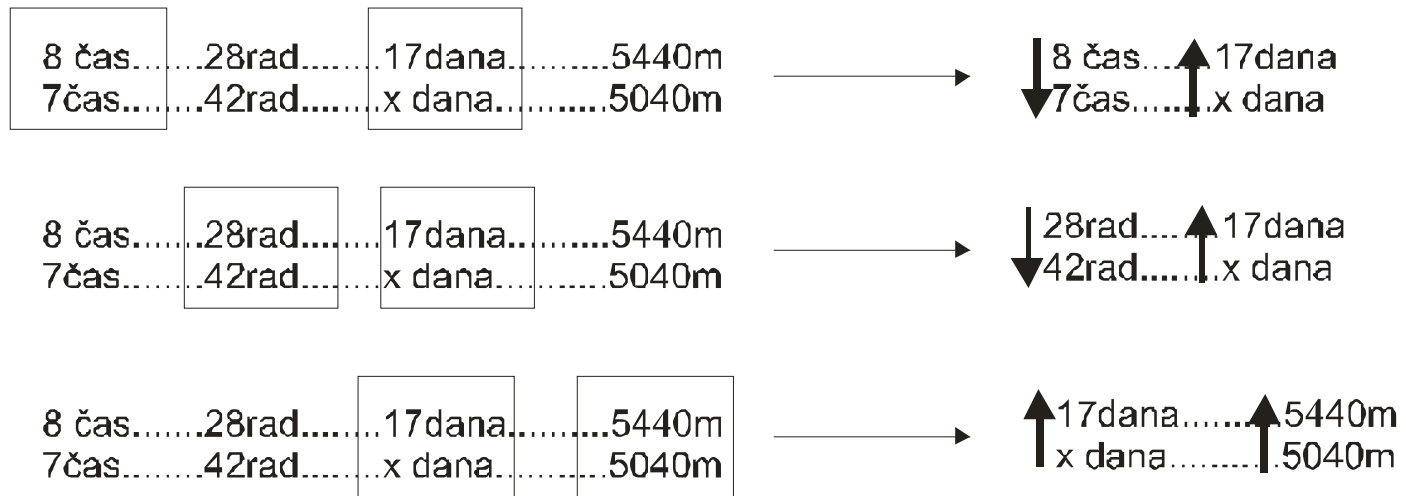
Zapišemo podatke kao da je u pitanju obična proporcija:

8 čas.....28rad.....17dana.....5440m
7čas.....42rad.....x dana.....5040m

Napišemo strelicu od x na gore kao i obično:

8 čas.....28rad.....↑17dana.....5440m
7čas.....42rad.....↑x dana.....5040m

E sad je trik da ovaj podatak posmatramo posebno sa svakim i udarimo strelice:



Sad ove strelice prenesemo na početnu postavku:

↓8 čas.....↓28rad.....↑17dana.....↑5440m
↓7čas.....↓42rad.....↑x dana.....↑5040m

Vi naravno ne morate sve postupno već odmah strelice udarate na početnoj postavki, ali je bitno da svaki podatak posmatrate sa X dana prema 17 dana.

Sad pratimo strelice i pravimo proporciju, ali pazite, podaci se zapisuju jedan ispod drugog:

$$\begin{aligned}
 x:17 &= 8:7 \\
 &= 28:42 \\
 &= 5040:5440
 \end{aligned}$$

Sad pomnožimo sve spoljašnje i sve unutrašnje (spoljašnji su uokvireni)

$$\begin{aligned}
 \boxed{x}:17 &= 8:\boxed{7} \\
 &= 28:\boxed{42} \\
 &= 5040:\boxed{5440}
 \end{aligned}$$

$$x \cdot 7 \cdot 42 \cdot 5440 = 17 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 5040$$

Pazi: jednako pišemo ispod jednako!

$$x = \frac{17 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 5040}{7 \cdot 42 \cdot 5440}$$

$$x = 12 \text{ dana}$$

II način

Ideja ovog drugog načina je da se grupišu podaci.

Obeležimo sa x broj traženih dana. Razmišljamo kolika je cena (vrednost) pravljenja puta?

Iz rečenice zadatka: **Radeći dnevno po 8 časova ,28 radnika za 17 dana asfaltiraju 5440 metara puta,** možemo zaključiti da je **vrednost 5440 metara puta u radnim časovima 8*28*17.**

Iz druge rečenice : **Koliko dana će raditi 42 radnika na sledećoj deonici puta, dužine 5040 metara radeći dnevno po 7 časova,** zaključujemo da je **vrednost 5040 metara puta u radnim časovima 7*42*X.**

Možemo zapisati:

$$\begin{array}{l}
 5440 \text{ m} \dots\dots\dots 28 \cdot 17 \cdot 8 \text{ radnih sati} \\
 5040 \text{ m} \dots\dots\dots 42 \cdot 7 \cdot x \text{ radnih sati}
 \end{array}
 \quad \text{pa je} \quad
 \begin{array}{l}
 \uparrow 5440 \text{ m} \dots\dots\dots \uparrow 28 \cdot 17 \cdot 8 \text{ radnih sati} \\
 \uparrow 5040 \text{ m} \dots\dots\dots \uparrow 42 \cdot 7 \cdot x \text{ radnih sati}
 \end{array}$$

Odavde je proporcija:

$$(42 \cdot 7 \cdot x) : (28 \cdot 17 \cdot 8) = 5040 : 5440$$

I opet se rešenje dobija x = 12 dana.

Vi naravno radite kako smatrate da vam je lakše, **to jest onako kako zahteva profesor.**

Primer 7.

65 radnika iskopa neki kanal za 23 dana. Posle 15 dana 13 radnika napusti posao. Koliko dana treba onima koji su ostali da završe ostatak posla.

Rešenje:

Ovde ne treba odmah upisivati podatak :

65 radnika.....23 dana već 65 radnika.....8 dana

Zašto?

U zadatku se kaže da je posle 15 dana otišlo 13 radnika, što znači da je ostalo $23 - 15 = 8$ dana

Za donji deo postavke ćemo uzeti $65 - 13 = 52$ radnika a nepoznata je x dana.

Dakle:

65 radnika..... 8 dana	→	65 radnika..... 8 dana
52 radnika..... x dana		52 radnika..... x dana

$$x : 8 = 65 : 52$$

$$52x = 65 \cdot 8$$

$$x = \frac{65 \cdot 8}{52}$$

$$\boxed{x = 10 \text{ dana}}$$

Još jedna stvar o kojoj morate voditi računa je sledeća: Ovde nas u zadatku pitaju koliko treba dana da se završi ostatak posla, i tu je odgovor 10 dana.

Medjutim, da je bilo pitanje za koliko dana bi **ceo** posao onda bio završen, odgovor bi bio $15 + 10 = 25$ dana.

Još jedna napomena, najčešći slučajevi obrnute proporcionalnosi su:

Broj radnika ---- utrošak vremena

Brzina kretanja ---- vreme putovanja

Zupčanicu ---- broj obrtaja