Apsolutna i relativna greška približnog broja

Često u praksi radimo sa približnim vrednostima brojeva. U prethodnom fajlu smo se podsetili kako se vrši zaokrugljivanje brojeva. Naravno, tom prilikom se napravi određena greška.

Ako sa x obeležimo tačnu vrednost nekog broja a sa x' približnu vrednost onda je

$\Delta(x') = |x - x'|$ **apsolutna greška.**

Možemo zapisati $x = x' \pm \Delta(x')$

Primer 1.

Broj $\frac{6}{7}$ zaokrugli na dve decimale i odredi apsolutnu grešku.

Rešenje :

Najpre podelimo 6:7 = 0,857 , dovoljne su tri decimale jer zaokrugljujemo na dve.

$0,85\boxed{7} \approx 0,86$ bacamo broj veći od 5 pa prethodnu cifru povećamo za 1.

Imamo:

$$x = \frac{6}{7} \quad \text{i} \quad x' = 0,86 = \frac{86}{100} = \frac{43}{50}$$

$$\Delta(x') = |x - x'|$$

$$\Delta(x') = \left|\frac{6}{7} - \frac{43}{50}\right| = \left|\frac{300-301}{350}\right| = \left|-\frac{1}{350}\right| = \frac{1}{350}$$

Kad nađemo apsolutnu grešku dati broj možemo zapisati kao: $x = \frac{43}{50} \pm \frac{1}{350}$.

Primer 2.

Vršili smo dva merenja: Sto tačne dužine 120cm smo izmerili da je 119cm a olovku tačne dužine 15cm smo izmerili da je 16cm. Da li su greške iste?

Rešenje :

Sto	*Olovka*
$x = 150cm \quad \text{i} \quad x' = 149cm$	$x = 15cm \quad \text{i} \quad x' = 16cm$
$\Delta(x') = \lvert x - x' \rvert$	$\Delta(x') = \lvert x - x' \rvert$
$\Delta(x') = \lvert 150 - 149 \rvert = 1$	$\Delta(x') = \lvert 15 - 16 \rvert = 1$

Znači napravili smo istu grešku, ali tu nešto nije logično…

Trebalo bi da bude tačnije merenje stola, jer je duži !

E zato imamo i **relativnu grešku** koja se računa : $\delta(x') = \dfrac{\Delta(x')}{|x'|}$.

Pogledajmo opet naš primer:

<u>Sto</u>

$x = 150cm \quad \text{i} \quad x' = 149cm$

$\Delta(x') = |x - x'|$

$\Delta(x') = |150 - 149| = 1$

$\delta(x') = \dfrac{\Delta(x')}{|x'|} = \dfrac{1}{149} = 0,0067$

<u>Olovka</u>

$x = 15cm \quad \text{i} \quad x' = 16cm$

$\Delta(x') = |x - x'|$

$\Delta(x') = |15 - 16| = 1$

$\delta(x') = \dfrac{\Delta(x')}{|x'|} = \dfrac{1}{16} = 0,063$

Sad je jasno da je merenje stola preciznije jer je manja relativna greška.

Primer 3.

Broj 3,1415 zaokrugli na ceo broj i odredi greške.

Rešenje :

$x = 3,\boxed{1}415 \rightarrow x' = 3$ bacamo jedinicu pa prethodni ne diramo

$x = 3,1415 \quad \text{i} \quad x' = 3$

$\Delta(x') = |x - x'|$

$\Delta(x') = |3,1415 - 3| = 0,1415 \approx 0,15$

$\delta(x') = \dfrac{\Delta(x')}{|x'|} = \dfrac{0,15}{3} = 0,05$

Sad se nameće sledeće pitanje: **Na koliko decimala zaokrugliti greške?**

To najčešće bude dogovor između profesora i đaka a mi ćemo pokušati da objasnimo kakav je dogovor uopšteno.

Prvo da objasnimo šta su to značajne cifre u zaokrugljenom broju x’.

Značajne cifre su sve cifre različite od nule, nule između cifara različitih od nule i nule na kraju decimalnog zapisa.

Na primer , u broju x’ = 0,007060 značajne cifre su 7 i 6, zatim 0 između 7 i 6 , zatim 0 na kraju decimalnog zapisa.

Apsolutna greška se zaokrugljuje na 1 ili 2 značajne cifre a važi pravilo **majorizacije** koje kaže da uvek zaokruglimo na veći broj (ne važi pravilo zaokrugljivanja od pre)

Recimo u našem primeru smo imali $\Delta(x')=|3{,}1415-3|=0{,}1415\approx 0{,}15$ ili smo mogli $\Delta(x')=|3{,}1415-3|=0{,}1415\approx 0{,}2$

Relativna greška se zaokrugljuje na dve značajne cifre.

Dalje ćemo naučiti kako se vrše računske operacije sa približnim brojevima.

Primer 4.

Date su približne vrednosti brojeva $x=2{,}4\pm 0{,}2$ i $y=1{,}8\pm 0{,}3$. Odrediti:

a) x+y
b) x-y
c) x*y
d) x:y

Rešenje:

Označimo sa m – najmanju vrednost a sa M – najveću vrednost veličine.

Za x će biti m = 2,4 – 0,2 = 2,2 a M = 2,4 +0,2 = 2,6

Za y imamo m = 1,8 -0,3 = 1,5 i M = 1,8 +0,3 = 2,1

Pravimo malu tabelicu:

a)

	m	**M**
x	2,2	2,6
y	1,5	2,1
x+y	3,7	4,7

Kad sabiramo idemo m sa m i M sa M.

Za približnu vrednost uzimamo aritmetičku sredinu m i M.

$(x+y)'=\frac{3{,}7+4{,}7}{2}=\frac{8{,}4}{2}=4{,}2$ a grešku tražimo tako što od M oduzmemo ovu aritmetičku sredinu ili od aritmetičke sredine oduzmemo m.(isto je naravno rešenje).

$$\Delta\left((x+y)'\right)=4{,}7-4{,}2=0{,}5$$

Zapisujemo:

$$x+y=(x+y)'\pm\Delta\left((x+y)'\right)$$
$$x+y=4{,}2\pm 0{,}5$$

b)

	m	M
x	2,2	2,6
y	1,5	2,1
x - y	0,1	1,1

PAZI : Kad oduzimamo idemo m sa M i M sa m.

Za naš primer 2,2 – 2,1 = 0,1 I 2,6 – 1,5 = 1,1

Dalje ide isto kao za sabiranje, tražimo aritmetičku sredinu

$$(x-y)' = \frac{0,1+1,1}{2} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

Od M oduzmemo aritmetičku sredinu

$$\Delta\left((x-y)'\right) = 1,1 - 0,6 = 0,5$$

Zapisujemo:

$$x-y = (x-y)' \pm \Delta\left((x-y)'\right)$$
$$x-y = 0,6 \pm 0,5$$

c)

	m	M
x	2,2	2,6
y	1,5	2,1
x*y	3,3	5,46

Kad množimo idemo m sa m i M sa M.

2,2*1,5 = 3,3 i 2,6*2,1 = 5,46

Za približnu vrednost uzimamo aritmetičku sredinu m i M.

$$(x*y)' = \frac{3,3+5,46}{2} = \frac{8,96}{2} = 4,48$$

$$\Delta\left((x*y)'\right) = 5,46 - 4,48 = 0,98$$

Zapisujemo:

$$x*y = (x*y)' \pm \Delta\left((x*y)'\right)$$
$$x*y = 4,48 \pm 0,98$$

d)

	m	M
x	2,2	2,6
y	1,5	2,1
x : y	1,05	1,73

PAZI : Kad delimo idemo m sa M i M sa m.

Za naš primer 2,2 :2,1 = 1,05   i   2,6 :1,5 = 1,73

$$(x:y)' = \frac{1,05+1,73}{2} = \frac{2,78}{2} = 1,39$$

$$\Delta\big((x:y)'\big) = 1,73 - 1,39 = 0,34$$

Zapisujemo:

$$x:y = (x:y)' \pm \Delta\big((x:y)'\big)$$
$$x:y = 1,39 \pm 0,34$$

Primer 5.

Ako je $x = 3,23 \pm 0,03$ i $y = 1,775 \pm 0,005$ izračunati vrednost izraza $u = \dfrac{x+3y}{y(x-y)}$

Rešenje:

Pravimo tabelicu da izračunamo vrednost izraza u.

	m	M
x	3,23-0,03=**3,20**	3,23+0,03=**3,26**
y	1,775-0,005=**1,77**	1,775+0,005=**1,78**
3y	3*1,77=**5,31**	3*1,78=**5,34**
x+3y	3,20+5,31=**8,51**	3,26+5,34=**8,60**
x-y	3,20-1,78=**1,42**	3,26-1,77=**1,49**
y(x-y)	1,77*1,42=**2,5134**	1,78*1,49=**2,6522**
u	8,51:2,6522=**3,2087**	8,60:2,5134=**3,4217**

Tražimo aritmetičku sredinu:

$$u' = \frac{3,2087+3,4217}{2} = \frac{6,6304}{2} = 3,3152 \approx 3,32$$

$$\Delta(u') = 3,4217 - 3,3152 = 0,1065 \approx 0,11$$

$$u = u' + \Delta(u') \rightarrow u = 3,32 \pm 0,11$$