

REALNI BROJEVI – OBNAVLJANJE

O BROJEVIMA

Da se podsetimo skupova brojeva:

Skup prirodnih brojeva je $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

Ako skupu prirodnih brojeva dodamo i nulu onda imamo skup $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Međutim, u skupu prirodnih brojeva su definisane samo operacije sabiranja i množenja ($+$ i \circ).

Kako sad pa to?

Pa ako recimo pokušamo da izračunamo koliko je $3 - 5 = ?$ ili $10 : 4 = ?$ videćemo da rešenja nisu u skupu prirodnih brojeva jer je $3 - 5 = -2$ a $10 : 4 = 2,25$.

Dakle, treba nam neki veći skup brojeva od skupa N .

Skup celih brojeva je $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ovde su definisane operacije $+$, $-$, \circ ali deljenje još “ne radi”.

Tražimo neki još veći skup...

Skup racionalnih brojeva $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N \right\}$

Ovde su definisane operacije $+$, $-$, \circ , $:$, dakle ovde “radi” i deljenje.

Ovom skupu pripadaju svi celi brojevi i razlomci oblika $\frac{p}{q}$, a mora da važi da je $p \in Z, q \in N$.

Što sad pa ovo?

Pa pošto deljenje sa nulom nije dozvoljeno (bar ne zasad...) mi se obezbedimo sa $q \in N$ da dole nije nula.

Ako su predstavljeni u decimalnom zapisu, racionalni brojevi imaju konačan broj decimala, ili se te decimale periodično ponavljaju.

Da razjasnimo ovo na nekoliko primera:

$\frac{7}{2} = 3,5$ je racionalan broj

$\frac{13}{9} = 1,333\dots = 1,\bar{3}$ je racionalan broj

$\frac{76}{99} = 0,767676\dots = 0,\overline{76}$ je racionalan broj

0,24356835...nije racionalan broj jer nema brojeva koji se periodično ponavljaju...

Pa kakvi su onda to brojevi?

Iracionalni brojevi su neperiodični beskonačni decimalni brojevi, i ovaj skup se obeležava sa I.

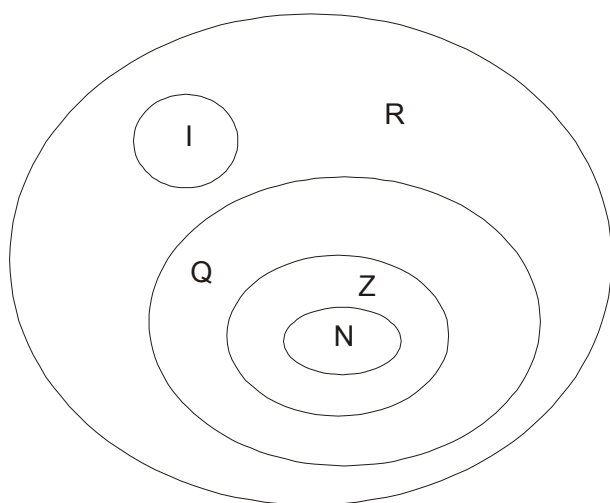
Skupu iracionalnih brojeva još pripadaju koreni svih prostih brojeva ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ ali i “kombinacije na tu temu” kao

na primer: $\sqrt{2} + 1, \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ itd...) i konstanta $\pi \approx 3,14$.

Unija skupa racionalnih brojeva Q i skupa iracionalnih brojeva I nam daje skup realnih brojeva R.

Dakle: $R = Q \cup I$

Na slici bi to izgledalo:



KRITERIJUMI DELJIVOSTI, NZD I NZS

Broj je deljiv sa 2 ako se završava sa 0,2,4,6,8

Primer:

338 je deljiv sa 2 jer se završava sa 8

6335 nije deljiv sa 2 jer se završava sa 5

Broj je deljiv sa 3 ako mu je zbir cifara deljiv sa 3

Primer:

141 je deljiv sa 3 jer je $1+4+1 = 6$ a 6 je deljivo sa 3, to jest $141:3 = 47$

224 nije deljivo sa 3 jer je $2+2+4 = 8$ a 8 nije deljivo sa 3

Broj je deljiv sa 5 ako mu je poslednja cifra 0 ili 5

Primer:

775 je deljiv sa 5 jer se završava sa 5 to jest $775:5 = 155$

321 nije deljiv sa 5 jer se završava sa 1

Ova tri kriterijuma su nam najznačajnija, navešćemo vam još neke :

Broj je deljiv sa 4 ako je njegov dvocifreni završetak deljiv sa 4

Broj je deljiv sa 6 ako je deljiv sa 2 i sa 3

Broj je deljiv sa 8 ako mu je trocifreni završetak deljiv sa 8

Broj je deljiv sa 9 ako mu je zbir cifara deljiv sa 9 (isti kriterijum kao i za 3)

Broj je deljiv sa 10 ako se završava sa 0, sa 100 ako se završava sa 00 , itd.

Broj je deljiv sa 25 ako se završava sa 00, 25, 50, 75

Prosti brojevi su deljivi samo sa jedinicom i sa samim sobom.

Prvih nekoliko prostih brojeva je : **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...**

Složeni brojevi su deljivi sa još nekim brojem osim sa jedinicom i sa samim sobom.

Prvih nekoliko složenih brojeva je: **4, 6, 8, 9, 10, 12, 14...**

Jedinica po dogovoru nije ni prost ni složen broj.

Najveći zajednički delilac (NZD ili samo D) je najveći broj sa kojim možemo podeliti date brojeve.

Primer : Nadji NZD za brojeve 18 i 24.

Možemo razmišljati ovako:

18 je deljivo sa 1, sa 2, sa 3, sa 6 i sa 18

24 je deljivo sa 1, sa 2, sa 3, sa 6, sa 8, sa 12 i sa 24

Dakle 18 i 24 su zajedno deljivi sa 1, sa 2, sa 3 **i sa 6** i sve su ovo njihovi zajednički delioci.

Ali nama treba **najveći**, pa uzimamo da je to 6.

Možda je vama lakše da radite sledeći postupak(koji ste najverovatnije radili i u školi):

18, 24 | ovde upisujete prost broj (2,3,5...) ali tako da su **oba broja** deljiva sa njim!
Kako su oba deljiva sa 2, imamo...

18, 24 | 2
9, 12 | 3 (pazi, ovde ne može više 2 jer 9 nije deljivo sa 2)

3, 4 | gotov postupak, jer nema više brojeva sa kojima možemo podeliti i 3 i 4, a da to nije jedinica.

Sad jednostavno pomnožimo brojeve na desnoj strani:

$$D(18,24) = 2 \cdot 3 = 6$$

Najmanji zajednički sadržalac (NZS ili samo S) je najmanji broj koji je deljiv sa datim brojevima.

Primer: Nadji NZS za brojeve **8 i 12**.

Možemo razmišljati ovako:

Brojevi deljivi sa 8 su : 8,16,**24**, 32,40,**48**,56, 64...

Brojevi deljivi sa 12 su : 12,**24,48**, 96,...

Uočimo brojeve koji su deljivi i sa 8 i sa 12, to su: 24, 48, itd...

Nama od ovih brojeva treba najmanji a to je očigledno broj **24**.

Dakle: S (8,12) = 24

Standardnim postupkom bi bilo:

8,12 | 2
4, 6 | 2
2, 3 | 2 pazi, kod NZS **ne moraju** oba da budu deljiva upisanim prostim brojem
1, 3 | 3
1 | 1

Pomnožimo brojeve na desnoj strani:

$$S(8,12) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

RAZLOMCI

Razlomak je količnik dva prirodna broja $\frac{a}{b}$, odnosno $\frac{a}{b}$ je isto kao i $a : b$

$\frac{\text{brojilac}}{\text{imenilac}} \rightarrow \text{razlomačka - crta}$

a je brojilac, b je imenilac a razlomačka crta menja operaciju deljenje

Kakav sve može biti razlomak?

- i) Ako je $\frac{a}{b} < 1$ onda je razlomak **pravi**, na primer: $\frac{7}{12}; \frac{3}{5}; \frac{8}{11}; \dots$
- ii) Ako je $\frac{a}{b} > 1$ onda je razlomak **nepravi**, na primer: $\frac{21}{12}; \frac{13}{5}; \frac{28}{11}; \dots$
- iii) Ako je $\frac{a}{b} = 1$ (ili drugi ceo broj) onda je razlomak **privedan**, na primer: $\frac{2}{2}; \frac{15}{5}; \frac{55}{11}; \dots$

Proširivanje razlomaka podrazumeva da se brojilac i imenilac **pomnože istim brojem**.

Primeri:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} \text{ početni razlomak smo proširili sa 2}$$

Proširivanje možemo označiti i ovako: $\frac{2}{5} = \frac{2^{(*2)}}{5} = \frac{4}{10}$ (U suštini ovo je ista stvar, samo je stvar dogovora)

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \text{ početni razlomak smo proširili sa 3}$$

Skraćivanje razlomaka podrazumeva da se brojilac i imenilac **podele istim brojem**.

Primeri:

$$\frac{24}{36} = \frac{24 : 6}{36 : 6} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3} \text{ Savet: uvek skratite razlomak najvećim mogućim brojem (to je ustvari NZD za ta dva broja)}$$

Kako se sabiraju i oduzimaju razlomci?

Moguće je sabirati i oduzimati **samo** razlomke sa **istim imeniocem!**

Primer:

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3+5-7}{10} = \frac{1}{10}$$

Sabiranje (oduzimanje) razlomaka **nejednakih imenilaca** vrši se proširivanjem razlomaka na **isti imenilac**, odnosno najdemo NZS za imenioce...pa izvršimo proširivanje.

Primer:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = \text{najpre najdemo NZS za 6,4 i 8}$$

$$\begin{array}{l|l} 6, 4, 8 & 2 \\ 3, 2, 4 & 2 \\ 3, 1, 2 & 2 \\ 3, 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \longrightarrow \text{Dakle } S(6,4,8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Dole u imeniocu je 24, a to znači da prvi razlomak proširavamo sa 4, drugi sa 6 i treći sa 3

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 - 7 \cdot 3}{24} = \frac{4 + 18 - 21}{24} = \frac{1}{24}$$

Kako se množe i dele razlomci?

Razlomci se množe tako što pomnožimo brojilac sa brojiocem a imenilac sa imeniocem. Naravno, uvek

prvo pogledamo da li nešto može da se “ skрати”...

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Primer:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21} \quad \text{Nema ništa za skraćivanje...}$$

Ako je moguće, skraćivanje vršimo unakrsno i uspravno: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ ili (i) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

Primer:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{9}{6} = \frac{\overset{2/}{\cancel{4}}}{\underset{5/}{\cancel{10}}} \cdot \frac{\overset{3/}{\cancel{9}}}{\underset{2/}{\cancel{6}}} \quad (\text{Skratimo 4 i 10 sa 2} \quad \text{a} \quad 9 \text{ i } 6 \text{ sa } 3) = \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = (\text{Sad možemo 2 i 2 sa 2}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{5}$$

Razlomci se dele tako što se brojilac prvog razlomka podeli sa brojiocem drugog razlomka i imenilac prvog sa imeniocem drugog razlomka, **pod uslovom da su oni deljivi**.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$$

Primer:

$$\frac{15}{8} : \frac{5}{4} = \frac{15 : 5}{8 : 4} = \frac{3}{2}$$

Ako **nisu deljivi** tada se prvi razlomak pomnoži recipročnom vrednošću drugog razlomka.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Primer:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

Šta je to mešoviti broj?

Svaki nepravilni razlomak $\frac{a}{b} > 1$ se može izraziti preko mešovitog broja.

Primeri:

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \quad \text{čita se: dva cela i jedna trećina}$$

$$\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} \quad \text{tri cela i četiri petine}$$

A kako mešoviti broj prebaciti u razlomak?

$$A\frac{B}{C} = \frac{A \cdot C + B}{C}$$

Primeri:

$$4\frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{22}{5}$$

$$2\frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 3}{8} = \frac{19}{8}$$

Procentni zapis razlomka

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 100\%}{b}$ Dakle, brojilac pomnožimo sa 100% a imenilac ne diramo, naravno posle skratimo ako je moguće...

Primeri:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 100\%}{5} = \frac{200}{5}\% = 40\%$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 100\%}{3} = \frac{100}{3}\%$$

Obrnuto , **preći iz procenta u razlomak je još lakše:**

$x\% = \frac{x}{100}$ Dakle, samo dopišemo 100 u imeniocu.

Primeri:

$$4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$3\% = \frac{3}{100}$$

$$12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

Decimalni zapis razlomaka

Prvo da se podsetimo lakše stvari: **prelaska iz decimalnog zapisa u razlomak:**

- Ako ima jedno decimalno mesto, taj broj kroz 10
- Ako ima dva decimalna mesta, taj broj kroz 100
- Ako ima tri decimalna mesta, taj broj kroz 1000

Itd.

Primeri:

$$2,7 = \frac{27}{10} ; \quad 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} ; \quad 15,3 = \frac{153}{10} ;$$

$$0,09 = \frac{9}{100} ; \quad 5,41 = \frac{541}{100} ; \quad 0,55 = \frac{55}{100} = (\text{skratimo sa } 5) = \frac{11}{20}$$

$$0,009 = \frac{9}{1000} ; \quad 14,123 = \frac{14123}{1000}$$

Uvek je teže preći iz razlomka u decimalni zapis.

Kako razlomačka crta menja operaciju deljenja, uvek možemo podeliti brojilac i imenilac i preći u decimalni zapis, ali vodite računa da se može desiti da se javi beskonačno ponavljanje jednog ili više brojeva!

Primeri:

i) $\frac{7}{2} = 7 : 2 =$ Dakle sad trebamo podeliti 7 sa 2

$$\begin{array}{r} 7 : 2 = 3,5 \\ -6 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$

ii) $\frac{1}{15} = 1 : 15 =$

$$\begin{array}{r} 1 : 15 = 0,066..... \\ -0 \\ \hline 10 \\ -0 \\ \hline 100 \\ -90 \\ \hline 100 \\ -90 \\ \hline \text{itd.} \end{array}$$

Evo primera gde će 6 da se ponavlja beskonačno mnogo puta...zato pazi...

Da bi imali brzinu u radu, toplo vam preporučujemo da zapamtite sledeće veze:

$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{1}{8} = 0,125$
	$\frac{3}{4} = 0,75$	$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{3}{8} = 0,375$
		$\frac{3}{5} = 0,6$	$\frac{5}{8} = 0,625$
		$\frac{4}{5} = 0,8$	$\frac{7}{8} = 0,875$

Kako raditi sabiranje i oduzimanje u decimalnom zapisu?

Ovde imamo sledeći savet:

Potpisujte i obavezno pazite da zarez bude ispod zareza.

Primeri:

i) $2,34 + 14,02 = ?$

$$\begin{array}{r} 2,34 \\ +14,02 \\ \hline 16,36 \end{array}$$

ii) $0,25 + 15,138 = ?$

$0,25$
 $+15,138$ Pazi da se ne zbuniš, ako negde **fali broj**, slobodno **dodaj nulu**(naravno, sa desne strane).

$$\begin{array}{r} 0,250 \\ +15,138 \\ \hline 15,388 \end{array}$$

iii) $4,31 - 3,998 = ?$

$$\begin{array}{r} 4,310 \\ -3,998 \\ \hline 0,312 \end{array}$$

Kako se množi u decimalnom zapisu?

Datim brojevima u decimalnom zapisu “ skinete “ zareze i ta dva broja pomnožite normalno. Zatim prebrojite decimalna mesta u oba data broja . U rešenju , s desna na levo , odbrojimo toliko mesta i tu upišemo zarez.

Naravno, uvek imate opciju da predjete u razlomak i tako pomnožite ta dva broja.

Primeri:

i) $3,5 * 4,22 = ?$

Dakle skinemo zareze: $35 * 422 = 14770$, ovde sa desna na levo odbrojimo tri mesta jer $3,5 * 4,22$

ukupno ima 3 decimalna mesta, pa je rešenje: 14,770



ii) $0,5 * 0,002 = ?$

Ovde množimo samo $5 * 2 = 10$

Ukupno ima 4 decimalna mesta: $0,5 * 0,002$ Kako sada? Kad u broju 10 nema toliko mesta?
 $\uparrow \quad \uparrow \uparrow \uparrow$

U ovakvoj situaciji dopisujemo nule, da bi napravili ta 4 decimalna mesta: 0, **0010**

Ako vam ovo nije baš najjasnije, **predjite u razlomak**:

$$0,5 * 0,002 = \frac{5}{10} * \frac{2}{1000} = \frac{10}{10000} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

Deljenje - decimalni zapis:

Postoji više načina da se odradi deljenje brojeva datih u decimalnom zapisu. Kao i kod množenja uvek imate opciju da **predjete u razlomak** i obavite deljenje.

Jedan od načina je i da izvršimo proširivanje oba broja sa 10,100,1000,... tako da napravimo da **delilac** bude ceo broj.

Primeri:

i) $2,7 : 0,3 = ?$

Dakle oba proširimo sa 10, pa dobijamo $27 : 3 = 9$

ii) $0,35 : 1,6 = ?$

Oba proširimo sa 10, pa imamo $3,5 : 16 = ?$

$$3,5 : 16 = 0,21875$$

$$\begin{array}{r} \underline{-0} \\ 35 \\ \underline{-32} \\ 30 \\ \underline{-16} \\ 140 \\ \underline{-128} \\ 120 \\ \underline{-112} \\ 80 \\ \underline{-80} \\ \underline{-0} \end{array}$$

A da smo išli preko razlomaka: $\frac{35}{100} : \frac{16}{10} = \frac{35}{100} * \frac{10}{16} = \frac{35}{160}$

Da vas podsetimo i pravila za sabiranje i oduzimanje brojeva:

- i) Ako su brojevi **istog znaka**, onda ih **saberemo** i uzmemo taj **isti znak**
- ii) Ako su brojevi **različitog znaka**, onda ih **oduzmemo** i uzmemo **znak većeg** od njih
- iii) Ako ispred broja **nema znak**, podrazumeva se da je **plus**

Primeri:

$-4 - 5 = -9$ **Zašto?** Brojevi su istog znaka, pa ih saberemo $4+5 = 9$, i uzmemo taj isti znak, dakle -9

$$+10 + 2 = 12$$

$-15 + 13 = -2$ **Zašto?** Brojevi su različitog znaka, pa ih oduzimamo, a pošto je $15 > 13$ znak je $-$

$$-16 + 20 = +4$$

Ako vas negde zadesi zagrada, setite se one pesmice: **Ispred zagrade manje(-) nastaje menjanje, ispred**

zagrade više (+), zagrada se briše!

Primeri:

$$10 - (-2) = 10 + 2 = 12$$

$$10 - (+2) = 10 - 2 = 8$$

$$10 + (-2) = 10 - 2 = 8$$

Za množenje i deljenje brojeva uvek prvo odredite znak:

$$+ \cdot + = +$$

$$+ : + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$- : - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$+ : - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$- : + = -$$

Primeri:

$$-8 * (-4) = +32 \quad (\text{ili samo } 32, \text{ pošto } + \text{ ne moramo da pišemo})$$

$$-10 * 9 = -90$$

$$\frac{-15}{3} = -5 \quad \text{Zašto? Kod trojke je } +, \text{ a } - : + = -$$

Apsolutna vrednost broja

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Ovo je definicija, koju vi naravno ništa ne razumete...Da probamo da pojasnimo...

Kad vam je **samo broj** pod apsolutnom vrednošću, on uvek "izlazi" kao pozitivan broj.

Na primer:

$$|-5| = 5 \quad | +5| = 5$$

Ali ako imate nepoznatu: x ili y ili z ili bilo koje slovo onda ta nepoznata ima dve vrednosti.

Na primer: Reši jednačinu: $|x| = 7$

Ovde x može da bude 7 ali može da bude i -7, tako da imamo dva rešenja!

Slično je i kod korena: $\sqrt{x^2} = |x|$

Na primer: Reši jednačinu: $x^2 = 16$

Ovde vodite računa, jer ćemo opet imati dva rešenja

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

Pa su rešenja: $x = +4$ ili $x = -4$