Metoda svodjenja na protivrečnost (apsurd)

Reductio ad absurdum

Ovom metodom se dokazuju tautologije tako što pretpostavimo suprotno, da data formula nije tautologija ,pa onda razvijamo formulu dok ne dodjemo do protivrečnosti da neko iskazno slovo (ili deo formule) ima vrednost tačno i netačno.

Primer 1. Dokazati da je formula tautologija

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno , da formula nije tautologija: $\tau\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)\big) = \perp$

U dokazu koristimo grčko slovo τ , čita se „tau“.

Znamo da je implikacija netačna samo kad ide tačno pa netačno, pa imamo:

$\tau(p \Rightarrow q) = \mathrm{T}$ i $\tau(\neg q \Rightarrow \neg p) = \perp$

Sad razvijamo drugo tvrdjenje jer ovo prvo ima tri mogućnosti.

$$\tau(\neg q \Rightarrow \neg p) = \perp$$
$$\tau(\neg q) = \mathrm{T} \quad \text{i} \quad \tau(\neg p) = \perp$$
$$\tau(q) = \perp \quad \text{i} \quad \tau(p) = \mathrm{T}$$

Dobili smo vrednosti za q i p, sad ćemo to zameniti u $\tau(p \Rightarrow q) = \mathrm{T}$, da proverimo da li važi.

$\tau(p \Rightarrow q) = \tau(\mathrm{T} \Rightarrow \perp) = \perp$

Dobili smo da ovaj deo formule ima vrednosti tačno i netačno, što je apsurdno, pa zaključujemo da polazna pretpostavka nije dobra, odnosno da je formula tautologija.

Primer 2. Dokazati da je formula tautologija

$\big(p \wedge (p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r))\big) \Rightarrow \big(q \Rightarrow (s \vee t)\big)$

Dokaz:

Pretpostavimo da formula nije tačna, pa je $\tau\Big(\big(p \wedge (p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r))\big) \Rightarrow \big(q \Rightarrow (s \vee t)\big)\Big) = \perp$

Kao i u prethodnom primeru imamo implikaciju pa mora biti :

$\tau\Big(\big(p \wedge (p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r))\big)\Big) = T \quad \text{i} \quad \tau\Big(\big(q \Rightarrow (s \vee t)\big)\Big) = \perp$

Sada moramo razvijati oba dela.

Znamo da je konjukcija $\tau\Big(\big(p \boxed{\wedge} (p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r))\big)\Big) = T$ tačna samo ako su oba iskaza tačna , pa imamo:

$\tau\big(p\big) = T \quad \text{i} \quad \tau\big((p \Leftrightarrow (\neg q \wedge r)\big) = T$

$\tau\Big((T \boxed{\Leftrightarrow} (\neg q \wedge r)\Big) = T$

Znamo da je ekvivalencija tačna samo ako su oba tačna , pa je

$\tau\big(\neg q \wedge r\big) = T$

$\tau(\neg q) = T \quad \text{i} \quad \boxed{\tau\big(r\big) = T}$

$\boxed{\tau(q) = \perp}$

Dobili smo vrednosti za dva iskazna slova , vraćamo se na $\tau\Big(\big(q \Rightarrow (s \vee t)\big)\Big) = \perp$

Imlikacija je netačna samo kad ide tačno pa netačno , dakle:

$\boxed{\tau\big(q\big) = T} \quad \text{i} \quad \tau(s \vee t) = \perp$

Dobili smo da q ima vrednosti tačno i netačno, što je protivrečnost, što nam govori da polazna pretpostavka nije dobra pa je formula tautologija.

Primer 3. Dokazati da je formula tautologija

$\big((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r\big) \vee \big((s \wedge \neg t) \Rightarrow (r \vee p)\big)$

Dokaz:

Pretpostavimo da formula nije tačna $\tau\Big(\big((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r\big) \vee \big((s \wedge \neg t) \Rightarrow (r \vee p)\big)\Big) = \perp$

Ovde imamo disjunkciju koja je netačna samo kada su oba netačna.

$\tau\big((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r\big) = \perp \quad \text{i} \quad \tau\big((s \wedge \neg t) \Rightarrow (r \vee p)\big) = \perp$

Sad radimo oba dela, za prvi imamo implikaciju , pa je

$\tau\big(p \Leftrightarrow q\big) = \perp \quad \text{i} \quad \tau\big(\neg r\big) = \perp$

$\boxed{\tau\big(r\big) = T}$

Za drugi deo je isto implikacija:

$\tau(s \wedge \neg t) = T \quad \text{i} \qquad \tau(r \vee p) = \perp$

$$\boxed{\tau(r) = \perp} \quad \text{i} \quad \tau(p) = \perp$$

Evo nama kontradikcije, zaključujemo da je formula tautologija.

www.matematiranje.in.rs