Metoda diskusije po slovu

Izaberemo iskazno slovo (najbolje ono koje se najviše ponavlja) pa dokazujemo da je formula tačna kad je to iskazno slovo tačno a zatim i kad je to iskazno slovo netačno.

Ovde ćemo koristiti neke zakonitosti iz osnovnih tabelica za negaciju , i, ili, sledi i ekvivalentnost.

$T \wedge \Theta \Leftrightarrow \Theta$ (Ako je Θ tačna sve je tačno, ako je Θ netačna sve je netačno.)

$\perp \wedge \Theta \Leftrightarrow \perp$ (Koju god vrednost ima Θ, uvek će biti netačno.)

$T \vee \Theta \Leftrightarrow T$ (Koju god vrednost ima Θ, uvek će biti tačno.)

$\perp \vee \Theta \Leftrightarrow \Theta$ (Ako je Θ tačna sve je tačno, ako je Θ netačna sve je netačno.)

$\Theta \Rightarrow T \Leftrightarrow T$ (Koju god vrednost ima Θ, uvek će biti tačno.)

$\Theta \Rightarrow \perp \Leftrightarrow \neg\Theta$ (Ako je Θ tačna sve je netačno, ako je Θ tačna sve je netačno, zato ide negacija Θ)

$T \Rightarrow \Theta \Leftrightarrow \Theta$ (Ako je Θ tačna sve je tačno, ako je Θ netačna sve je netačno.)

$\perp \Rightarrow \Theta \Leftrightarrow T$ (Koju god vrednost ima Θ, uvek će biti tačno, iz laži sledi sve.)

$\Theta \Leftrightarrow T = \Theta$ (Ako je Θ tačna sve je tačno, ako je Θ netačna sve je netačno, stavili smo = umesto

ekvivalentno da vas ne zbunimo, mogli smo da zapišemi i kao $(\Theta \Leftrightarrow T) \Leftrightarrow \Theta$)

$\perp \Leftrightarrow \Theta = \neg\Theta$ (Ako je Θ tačna sve je netačno, ako je Θ tačna sve je netačno, zato ide negacija Θ)

Korisne mogu biti i $\Theta \vee \neg\Theta \Leftrightarrow T$ i $\Theta \wedge \neg\Theta \Leftrightarrow \perp$.

Nastavljamo sa primerima.

Primer 1.

Dokazati da je $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$ tautologija.

Dokaz:

Uočimo da se slovo p javlja tri puta pa ćemo diskusiju vršiti po njemu.

Za $\tau(p)=T$

$$\big((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\big)\Rightarrow\big(p\Rightarrow(q\wedge r)\big)$$
$$\big((T\Rightarrow q)\wedge(T\Rightarrow r)\big)\Rightarrow\big(T\Rightarrow(q\wedge r)\big)\Leftrightarrow$$
$$\big(q\wedge r\big)\Rightarrow\big(q\wedge r\big)\Leftrightarrow T$$

Koristili smo $T\Rightarrow\Theta\Leftrightarrow\Theta$

Za $\tau(p)=\perp$

$$\big((p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\big)\Rightarrow\big(p\Rightarrow(q\wedge r)\big)$$
$$\big((\perp\Rightarrow q)\wedge(\perp\Rightarrow r)\big)\Rightarrow\big(\perp\Rightarrow(q\wedge r)\big)\Leftrightarrow$$
$$\big(T\wedge T\big)\Rightarrow T\Leftrightarrow$$
$$T\Rightarrow T\Leftrightarrow T$$

Koristili smo $\perp\Rightarrow\Theta\Leftrightarrow T$

Primer 2.

Dokazati da je tautologija $\big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\neg q\wedge r))\big)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)$

Dokaz:

Ovde nam se slova p i q javljaju po dva puta pa ćemo krenuti sa radom diskusijom po jednom od ta dva slova. Ajmo recimo po q:

Za $\tau(q)=T$

$$\big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\neg q\wedge r))\big)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)$$
$$\Big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\boxed{\neg\perp}\wedge r))\Big)\Rightarrow\Big(\boxed{\perp\Rightarrow(s\vee t)}\Big)\Leftrightarrow$$
$$\Big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\boxed{T\wedge r}))\Big)\Rightarrow T\Leftrightarrow$$
$$\boxed{\big(p\wedge(p\Leftrightarrow r)\big)}\Rightarrow T\Leftrightarrow T$$

Za $\tau(q)=\perp$

$$\big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\neg q\wedge r))\big)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)$$
$$\Big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\boxed{\neg\perp}\wedge r))\Big)\Rightarrow\Big(\boxed{\perp\Rightarrow(s\vee t)}\Big)\Leftrightarrow$$
$$\Big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\boxed{T\wedge r}))\Big)\Rightarrow T\Leftrightarrow$$
$$\boxed{\big(p\wedge(p\Leftrightarrow r)\big)}\Rightarrow T\Leftrightarrow T$$

Da smo krenuli da radimo po p malo bi samo odužili posao, da vidimo:

Za $\tau(p)=T$

$$\big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\neg q\wedge r))\big)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)$$
$$\big(T\wedge(\boxed{T\Leftrightarrow(\neg q\wedge r)})\big)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)\Leftrightarrow$$
$$\big(T\Leftrightarrow\boxed{(\neg q\wedge r)}\big)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)\Leftrightarrow$$
$$(\neg q\wedge r)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)\Leftrightarrow$$

Šta je sad problem?

Moramo nastaviti diskusiju i po slovu q .

Za $\tau(p)=T$ i $\tau(q)=T$

$$(\neg q\wedge r)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)$$
$$(\boxed{\neg T}\wedge r)\Rightarrow\big(T\Rightarrow\boxed{(s\vee t)}\big)\Leftrightarrow$$
$$(\perp\wedge r)\Rightarrow T\Leftrightarrow$$
$$\perp\Rightarrow T\Leftrightarrow T$$

Za $\tau(p)=T$ i $\tau(q)=\perp$

$$(\neg q\wedge r)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)$$
$$(\boxed{\neg\perp}\wedge r)\Rightarrow\big(\perp\Rightarrow\boxed{(s\vee t)}\big)\Leftrightarrow$$
$$(T\wedge r)\Rightarrow T\Leftrightarrow$$
$$r\Rightarrow T\Leftrightarrow T$$

Sad se vraćamo da radimo za $\tau(p)=\perp$

$$\big(p\wedge(p\Leftrightarrow(\neg q\wedge r))\big)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)$$
$$\big(\perp\boxed{\wedge}(\perp\Leftrightarrow(\neg q\wedge r))\big)\Rightarrow\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)\Leftrightarrow$$
$$\perp\Rightarrow\boxed{\big(q\Rightarrow(s\vee t)\big)}\Leftrightarrow T$$