FUNKCIONALNE JEDNAČINE, INVERZNA FUNKCIJA I KOMPOZICIJA FUNKCIJA

FUNKCIONALNE JEDNAČINE

Postupak rešavanja:

i) “ Ono “ što je u zagradi stavimo da je t (smena)

ii) Odatle izrazimo x

iii) Vratimo se u početnu jednačinu , f (t) =... i gde vidimo x zamenimo ga sa onim što smo izrazili

iv) Sredimo taj izraz koji je sad sve ” po t ” i **zamenimo t sa x**

ZADACI

1) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

Rešenje:

$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ “ Ono “ što je u zagradi stavimo da je t

$x + 1 = t$ Odatle izrazimo x

$x = t - 1$ Vratimo se u početnu jednačinu , f (t) =... i gde vidimo x zamenimo ga sa onim što smo izrazili

$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2$

$f(t) = t^2 - 2t + 1 - 3t + 3 + 2$ Sredimo taj izraz koji je sad sve ” po t ”

$f(t) = t^2 - 5t + 6$ **zamenimo t sa x**

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ i evo konačnog rešenja date funkcionalne jednačine.

---

2) **Rešiti funkcionalnu jednačinu:** $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$

Rešenje:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$$

$\frac{1}{x} = t$ **pa je odavde** $\frac{1}{t} = x$ **ovo zamenimo u datoj jednačini**

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$$

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}$$

$$f(t)=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$$

$f(t)=\dfrac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}$ **zamenimo t sa x** $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$ je konačno rešenje

---

3) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f(\dfrac{x}{x+1})=x^2$

Rešenje:

$$f(\frac{x}{x+1})=x^2$$
$$\frac{x}{x+1}=t$$

x = t (x+1)

x = t x + t

x – tx = t izvučemo x kao zajednički na levoj strani...

x (1 – t) = t

$x=\dfrac{t}{1-t}$ **vratimo se sad na početnu jednačinu...**

$$f(\frac{x}{x+1})=x^2$$

$f(t)=(\dfrac{t}{1-t})^2$ **zamenimo t sa x ...** $f(x)=(\dfrac{x}{1-x})^2$ je konačno rešenje

---

4) **Reši funkcionalnu jednačinu:** $f(\dfrac{x+2}{2x+1})=5x+3$

Rešenje:

$$f(\frac{x+2}{2x+1})=5x+3$$

$$\frac{x+2}{2x+1}=t$$

x + 2 = t (2x + 1)

x + 2 = 2tx + t

x – 2tx = t – 2

x (1 – 2t) = t – 2

$x = \frac{t-2}{1-2t}$

$f(\frac{x+2}{2x+1}) = 5x + 3$

f (t) = 5 $\frac{t-2}{1-2t}$ **+ 3 sredimo… f (t) =** $\frac{5t-10}{1-2t}$ **+** $\frac{3(1-2t)}{1-2t}$ **=** $\frac{5t-10+3-6t}{1-2t}$ **=** $\frac{-t-7}{1-2t}$ **izvučemo minus gore i ubacimo ga u imenilac, koji onda promeni redosled … A - B = - (B – A)**

f (t) = $\frac{t+7}{2t-1}$

f (x) = $\frac{x+7}{2x-1}$ **je konačno rešenje**

---

5) **Ako je** $f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$**, izračunati f(3).**

Rešenje:

Najpre moramo naći f(x).

$f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$

$\frac{x}{x+1} = t$

x = t (x+1)

x = t x + t

x – tx = t

x (1 – t) = t

$x = \frac{t}{1-t}$ **vraćamo se u početnu jednačinu…**

$f(\frac{x}{x+1}) = (x-1)^2$

f (t) = ($\frac{t}{1-t}$ - 1)^2 Sada umesto t stavljamo 3 jer se traži f(3)…

f (3) = ($\frac{3}{1-3}$ - 1)^2 = $\frac{25}{4}$

---

6) Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Rešenje:

$f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ uzimamo smenu $x+\frac{1}{x} = t$, ako odavde probamo da izrazimo x kao što bi trebalo, zapadamo u probleme...

$x+\frac{1}{x} = t$ sve pomnožimo sa x…

$x^2 + 1 = xt$

$x^2 - xt + 1 = 0$ ovo je kvadratna jednačina po x i ne vodi rešenju…

TRIK : OVDE SMENU TREBAMO KVADRIRATI

$x+\frac{1}{x} = t$ kvadriramo…

$(x+\frac{1}{x})^2 = t^2$

$x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2$ pokratimo x-seve…

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ E sad se vratimo u datu početnu jednačinu...

$f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ **pa je f (t) = $t^2 - 2$ odnosno f(x) = $x^2 - 2$ je konačno rešenje**

---

7. Rešiti funkcionalnu jednačinu: $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$

Rešenje:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

I ovaj zadatak ne možemo uraditi " klasično" već se moramo poslužiti trikom...

Ako uzmemo smenu $\frac{x-2}{x+1}=t$ **, onda je** $\frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{t}$ **i**

$\frac{x-2}{x+1}=t$ **odavde** x-2 = t (x +1) pa je x – 2= tx + t , x – tx = t + 2 , x (1-t)= t + 2 i odavde je x = $\frac{t+2}{1-t}$

Vratimo se u datu jednačinu:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$$

f ($\frac{1}{t}$) + 2 f (t) = $\frac{t+2}{1-t}$ dobili smo jednu jednačinu...**E sad je trik da umesto t stavimo** $\frac{1}{t}$

f(t) + 2 f($\frac{1}{t}$) = $\frac{\frac{1}{t}+2}{1-\frac{1}{t}}=\frac{\frac{1+2t}{t}}{\frac{t-1}{t}}=\frac{1+2t}{t-1}$ dobismo i drugu jednačinu

Sada pravimo sistem od dve jednačine:

f ($\frac{1}{t}$) + 2 f (t) = $\frac{t+2}{1-t}$

f(t) + 2 f($\frac{1}{t}$) = $\frac{1+2t}{t-1}$

Prvu jednačinu pomnožimo sa -2 pa saberemo ove dve jednačine...

- 4 f (t) - 2 f ($\frac{1}{t}$) = -2 $\frac{t+2}{1-t}$

f(t) + 2 f($\frac{1}{t}$) = $\frac{1+2t}{t-1}$

- 3 f (t) = $\frac{-2t-4}{1-t}+\frac{1+2t}{t-1}=\frac{2t+4}{t-1}+\frac{1+2t}{t-1}=\frac{4t+5}{t-1}$ dakle

$- 3 f(t) = \frac{4t+5}{t-1}$ podelimo sve sa –3 i dobijamo

$f(t) = \frac{4t+5}{-3(t-1)}$ odnosno $f(t) = \frac{4t+5}{3-3t}$ umesto t stavimo x i dobijamo:

$f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}$ konačno rešenje

<u>INVERZNA FUNKCIJA</u>

Definišimo najpre bijektivno preslikavanje:

Za preslikavanje f: A$\to$B kažemo da je :

1) "jedan – jedan" (obostrano jednoznačno) , što skraćeno pišemo " 1-1 ", ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

2) "na" ako je $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$

3) **bijektivno ako je "1-1" i "na"**

Preslikavanje skupa A na sebe , u oznaci i_A , sa osobinom $(\forall x \in A)(i_A(x) = x)$ naziva se identičkim (jediničnim) preslikavanjem skupa A.

Ako je f: A$\to$B bijektivno preslikavanje, onda sa f^{-1} ozačavamo preslikavanje skupa B na skup A, koje ima osobinu da je $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i_A$. U tom slučaju f^{-1} nazivamo inverznim preslikavanjem preslikavanja f.

Postupak za rešavanje zadataka :

i) ***Umesto f(x) stavimo y***

ii) ***Odavde izrazimo x preko y***

iii) ***Izvršimo izmenu : umesto x pišemo f^{-1} (x) , a umesto y pišemo x.***

1. Data je funkcija f(x) = 2x – 1. Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija f(x) i $f^{-1}(x)$.

<u>Rešenje:</u>

$f(x) = 2x - 1$ ***Umesto f(x) stavimo y***

$y = 2x - 1$ ***Odavde izrazimo x preko y***

$2x = y + 1$

$x = \dfrac{y+1}{2}$ ***Izvršimo izmenu : umesto x pišemo $f^{-1}(x)$, a umesto y pišemo x.***

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$ i evo nam inverzne funkcije.

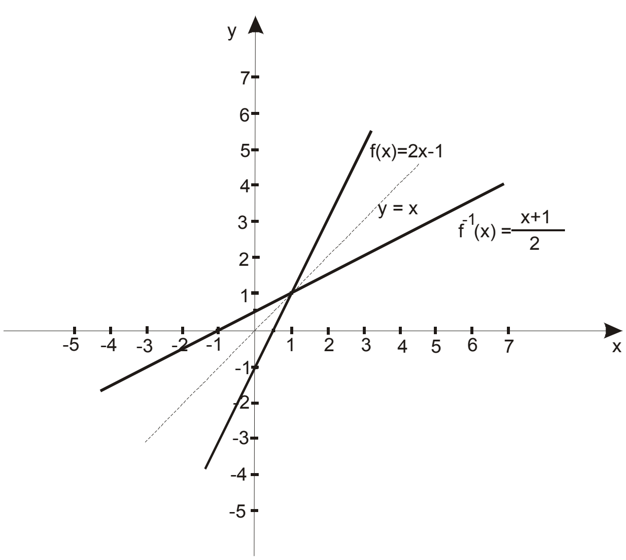
Pošto obe funkcije predstavljaju prave, uzećemo po dve proizvoljne tačke(prvo x = 0, pa y = 0) i nacrtati ih.

$f(x) = 2x - 1$

x	0	1/2
f(x)	-1	0

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

x	0	-1
$f^{-1}(x)$	1/2	0



Primetimo da su grafici simetrični u odnosu na pravu y = x .

2. Data je funkcija $f(x)=3x-3$. Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija f(x) i f^{-1}(x).

Rešenje:

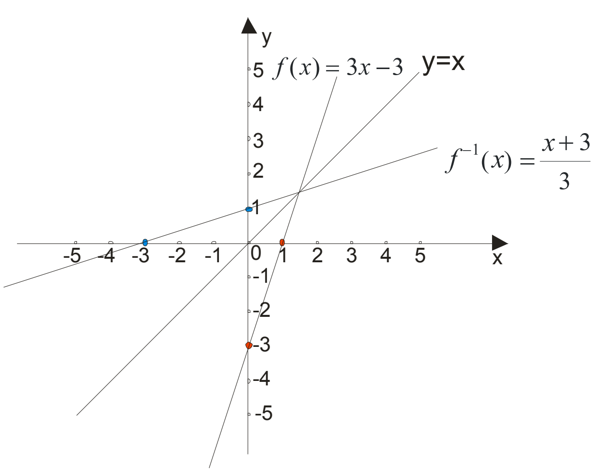
$$f(x)=3x-3$$
$$y=3x-3$$
$$3x=y+3$$
$$x=\frac{y+3}{3}\rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x+3}{3}}$$

za $f(x)=3x-3$

x	0	1
f(x)	-3	0

za $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{3}$

x	0	-3
f^{-1}(x)	1	0



Opet su grafici simetrični u odnosu na pravu y = x. Šta mislite, da li će uvek tako biti?

3. Odrediti inverznu funkciju za $f(x)=\dfrac{x-3}{x+7}$

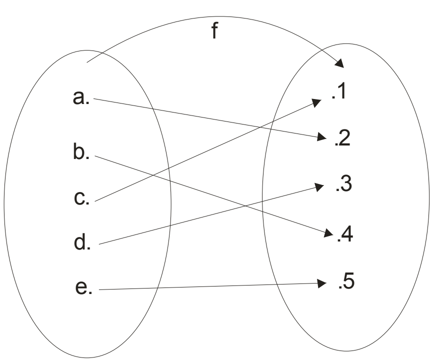
<u>Rešenje:</u>

$$f(x)=\frac{x-3}{x+7}$$
$$y=\frac{x-3}{x+7}$$
$$\frac{y}{1}=\frac{x-3}{x+7} \quad \text{množimo unakrsno}$$
$$y(x+7)=1(x+3)$$
$$yx+7y=x+3$$
$$yx-x=3-7y$$
$$x(y-1)=3-7y$$
$$x=\frac{3-7y}{y-1}\rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{3-7x}{x-1}}$$

4. Data je funkcija $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$**. Odrediti njenu inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.**

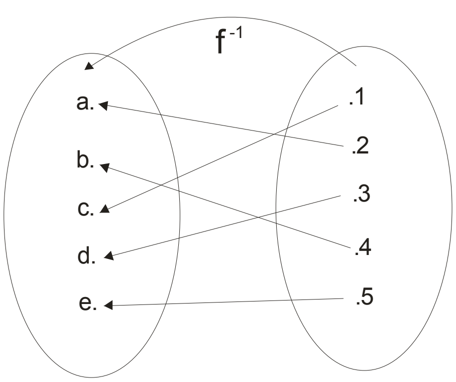
<u>Rešenje:</u>

Ovde nam je funkcija zadata na drugi način. Direktno znamo koji elemenat se u koji preslikava:



Šta će biti inverzna funkcija?

Pa jednostavno, elementi iz drugog skupa se slikaju u prvi…



Ili zapisano na drugi način: $f^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$

KOMPOZICIJA FUNKCIJA

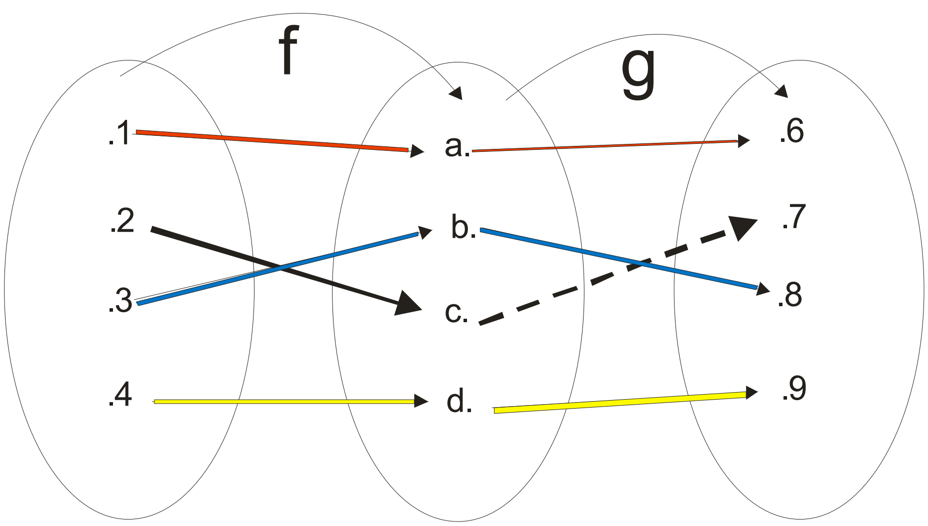
Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to C$ funkcije. Tada sa $g \circ f$ označavamo kompoziciju (proizvod) preslikavanja f i g, i definišemo ga sa $(\forall x \in A)\ ((g \circ f)(x) = g(f(x))$. Na ovaj način smo ustvari dobili preslikavanje $g \circ f : A \to C$ (kompozicija se najčešće obeležava sa $\circ$, a čita se " **kružić**"

primer 1.

Date su funkcije $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & b & d \end{pmatrix}$ **i** $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ **odrediti** $(g \circ f)(x)$

Rešenje:

Ajmo najpre da ovo predstavimo dijagramom da vidimo šta se zapravo dešava a onda ćemo ispisati i rešenje:



Za svaki element radimo posebno:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(1)) = g(\text{a}) = 6$ Na slici uočite ***crvene*** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(2)) = g(c) = 7$ Na slici uočite ***crne*** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(3)) = g(b) = 8$ Na slici uočite ***plave*** strelice.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(4)) = g(d) = 9$ Na slici uočite ***žute*** strelice.

primer 2.

Ako je $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **i** $h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}$ odrediti:

a) $f \circ g = ?$

b) $g \circ h = ?$

c) $(g \circ h) \circ f = ?$

Rešenje:

a) $f \circ g = ?$

Kako je $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **,**idemo redom:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(p)) = f(1) = c$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(q)) = f(4) = d$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(r)) = f(3) = b$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(s)) = f(2) = a$$

Odavde imamo da je: $f \circ g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$

b) $g \circ h = ?$

$g = \begin{pmatrix} p & q & r & s \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ r & p & q & s \end{pmatrix}$ **,** pa je :

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(a)) = g(r) = 3$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(b)) = g(p) = 1$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(c)) = g(q) = 4$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(h(d)) = g(s) = 2$$

Pa je : $g \circ h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $(g \circ h) \circ f = ?$

Slično radimo , samo što sada imamo tri funkcije u kompoziciji:

$$f = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ c\ a\ b\ d \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} a\ b\ c\ d \\ r\ p\ q\ s \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} p\ q\ r\ s \\ 1\ 4\ 3\ 2 \end{pmatrix}$$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x)))$ Prvo radimo *f*, pa *h* i na kraju *g*...

Ovako smemo da radimo jer važi asocijativni zakon $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f)$. Dakle:

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(1)) = g(h(c)) = g(q) = 4$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(2)) = g(h(a)) = g(r) = 3$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(3)) = g(h(b)) = g(p) = 1$

$[(g \circ h) \circ f](x) = g(h(f(x))) = g(h(f(4)) = g(h(d)) = g(s) = 2$

Ova kompozicija je $(g \circ h) \circ f = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 3\ 1\ 2 \end{pmatrix}$

primer 3.

Date su funkcije $f(x) = 3x - 2$ i $g(x) = 5x + 7$. Odrediti:

a) $f \circ g$
b) $g \circ f$
c) $f \circ f$
d) $g \circ g$

Rešenje:

Ovo je drugi tip zadatka vezan za kompoziciju funkcija.

a) $f \circ g$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$ Sad zamenimo funkciju koja je " unutra", znači $g(x)$

$(f \circ g)(x) = f(\boxed{g(x)}) = f(5x + 7) =$ nadjemo kako izgleda funkcija f $(f(x) = 3\boxed{x} - 2)$ i gde vidimo x stavimo sve iz zagrade...

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7) = 3\boxed{(5x + 7)} - 2$ i još da ovo malo prisredimo...

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x + 7) = 3(5x + 7) - 2 = 15x + 21 - 2 = 15x + 19$

b) $g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$ opet prvo zamenimo funkciju unutar...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2)$, sad posmatramo funkciju g i gde vidimo x stavimo sve iz zagrade...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = 5(3x-2)+7$ opet malo sredimo...

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) = 5(3x-2)+7 = 15x-10+7 = 15x-3$

c) $f \circ f$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x-2) = 3(3x-2)-2 = 9x-6-2 = 9x-8$

d) $g \circ g$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(5x+7) = 5(5x+7)+7 = 25x+35+7 = 25x+42$

primer 4. Date su funkcije $f(x+1) = 5x-3$ i $g(2x-3) = 3x+1$. Odrediti:

a) $f \circ g$

b) $g^{-1} \circ f^{-1}$

Rešenje:

Ovo je zadatak u kome vas profesor proverava sve tri stvari: funkcionalnu jednačinu, inverznu funkciju i kompoziciju funkcija.

Prvo da nadjemo *f(x)* i *g(x).*

$$f(x+1) = 5x-3$$
$$x+1 = t$$
$$x = t-1$$
$$f(t) = 5(t-1)-3$$
$$f(t) = 5t-5-3$$
$$f(t) = 5t-8 \rightarrow \boxed{f(x) = 5x-8}$$

$$g(2x-3) = 3x+1$$
$$2x-3 = t$$
$$2x = t+3$$
$$x = \frac{t+3}{2}$$
$$g(t) = 3\frac{t+3}{2}+1$$
$$g(t) = \frac{3t+9+2}{2}$$
$$g(t) = \frac{3t+11}{2} \rightarrow \boxed{g(x) = \frac{3x+11}{2}}$$

Dalje tražimo inverzne funkcije:

$$f(x) = 5x - 8$$
$$y = 5x - 8$$
$$5x = y + 8$$
$$x = \frac{y+8}{5} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+8}{5}}$$

$$g(x) = \frac{3x+11}{2}$$
$$y = \frac{3x+11}{2}$$
$$3x + 11 = 2y$$
$$3x = 2y - 11$$
$$x = \frac{2y-11}{3} \rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = \frac{2x-11}{3}}$$

Sada možemo naći:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{3x+11}{2}) = 5 \cdot \frac{3x+11}{2} - 8 = \frac{15x+55-16}{2} = \boxed{\frac{15x+39}{2}}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(\frac{x+8}{5}) = \frac{2 \cdot \frac{x+8}{5} - 11}{3} = \frac{\frac{2x+16-55}{5}}{3} = \frac{\frac{2x-39}{5}}{\frac{3}{1}} = \boxed{\frac{2x-39}{15}}$$