O SKUPOVIMA

Do pojma skupa može se vrlo lako doći empirijskim putem , posmatrajući razne grupe, skupine, mnoštva neke vrste objekata , stvari, živih bića i dr. Tako imamo skup stanovnika nekog grada, skup knjiga u biblioteci, skup klupa u učionici itd.
Tvorac teorije skupova je **Georg Kantor ,** nemački matematičar, koji je prvi dao "opisnu" definiciju skupa. Mnogi drugi matematičari su takođe pokušavali da definišu skup. **Danas, po savremenom shvatanju, pojam skupa se ne definiše, već se usvaja intuitivno kao celina nekih raz̆ičitih objekata**. Predmeti iz kojih je skup sastavljen zovu se **elementi** skupa. Postoje skupovi sa konačno mnogo elemenata, koje nazivamo **konačnim skupovima**, i skupovi sa beskonačno mnogo elemenata, odnosno **beskonačni skupovi.** Tako, na primer , skup stanovnika na zemlji predstavlja jedan konačan skup, dok skup svih celih brojeva sadrži beskonačno mnogo elemenata.

Skupove najčešće obeležavamo velikim slovima A,B ,.....X, Y,... , a elemente skupa malim slovima a,b,...,x,y,...

Ako je x element skupa X , tu činjenicu ćemo označavati sa $x \in X$, a ako ne pripada skupu X, označićemo sa $x \notin X$. Oznake ćemo čitati: "x pripada skupu X" ili "x je element skupa X". Oznaku $x \notin X$ ćemo čitati " x ne pripada skupu X" ili " x nije element skupa X"

Postavimo sada pitanje: " Koliko elemenata ima skup prirodnih brojeva većih od jedan a manjih od dva" ? Jasno je da takav skup nema ni jednog elementa. Za takav skup kažemo da je **prazan** i obeležava se sa $\varnothing$.

Međutim, desiće nam se nekad da nije zgodno, a ni moguće, da neposredno navedemo sve elemente nekog skupa. Stoga se koristi i ovakvo zapisivanje skupova:

$\{x \mid S(x)\}$ ili, isto $\{x|x$ ima svojstvo $S\}$, što bi značilo"skup svih x koji imaju svojstvo S". Na primer skup $X=\{7,8,9,10,11,12\}$ možemo zapisati i na sledeći način: $X=\{x \mid x \in N \wedge 6< x <13\}$.

Za neka dva skupa kažemo da su **jednaki** ako su svi elementi jednog skupa ujedno elementi drugog skupa, i obrnuto, svi elementi drugog skupa su elementi prvog skupa . Zapisujemo: **A=B ako i samo ako** $(\forall x)(x\in A \Leftrightarrow x \in B)$ **,**

na primer po definiciji biće $\{a,a,a,b,b,c\}=\{a,b,b,c,c,c\}=\{a,b,c\}$.

Dakle , svaki član skupa je prisutan jednim pojavljivanjem, a sva ostala njegova pojavljivanja, ukoliko ih ima, nisu važna, i, uz to, ni redosled navođenja članova nije bitan.

Kažemo da je skup B **podskup** skupa A, što označavamo $B\subset A$, ako su svi elementi skupa B takođe i elementi skupa A, tj.

$B\subset A$ **ako i samo ako** $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x\in A)$

Relacija uvedena ovom definicijom se zove relacija **inkluzije.** Ovde moramo voditi računa da se svi skupovi ne mogu upoređivati.

Prazan skup je podskup svakog skupa.

OPERACIJE SA SKUPOVIMA

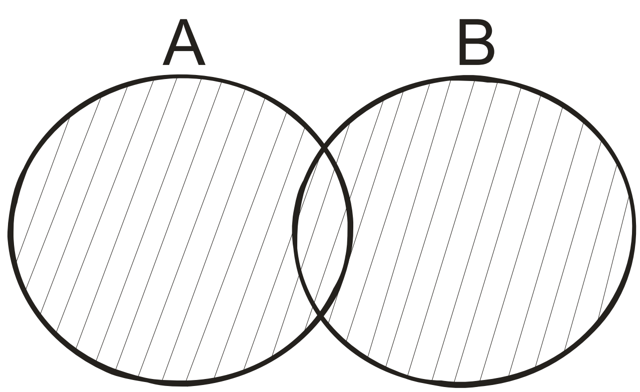
- UNIJA
- PRESEK
- RAZLIKA
- SIMETRICNA RAZLIKA
- PARTITIVNI SKUP
- DEKARTOV PROIZVOD
- KOMPLEMENT SKUPA

UNIJA

Skup svih elemenata koji su elementi bar jednog od skupova A ili B , zove se unija skupova A i B i označava se sa $A \cup B$.

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Na dijagramu bi to izgledalo ovako:



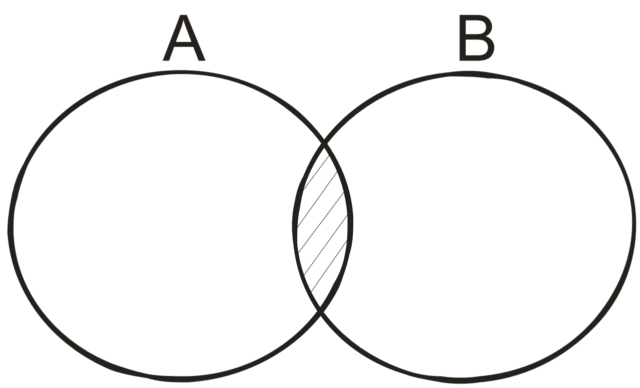
Primer: Ako je A={1,2,3} i B={2,3,4} $A \cup B$={1,2,3,4}

PRESEK

Skup svih elemenata koji su elementi skupa A i skupa B zove se presek skupova A i B i obeležava se sa $A \cap B$.

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Graficki prikaz bi bio:



Primer: Ako je A={1,2,3} i B={2,3,4} $A \cap B$={2,3}

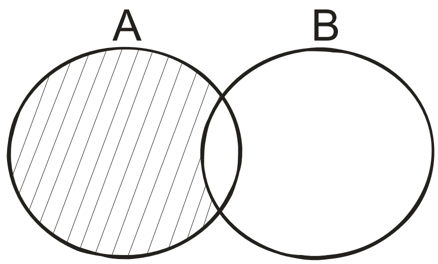
RAZLIKA

Skup svih elemenata koji su elementi skupa A ali nisu elementi skupa B zove se razlika redom skupova A i B u oznaci A\B.

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

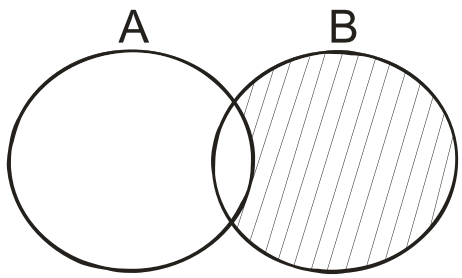
Naravno možemo posmatrati i skup B\A, to bi bili svi elementi skupa B koji nisu u A.

Na dijagramima to bi izgledalo ovako:



Za nas primer je **A\B={1}**

A\B



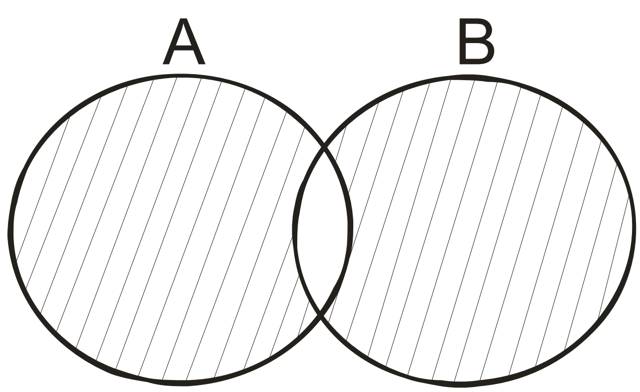
Za nas primer je B\A={4}

B\A

SIMETRIČNA RAZLIKA

Skup (A\B)$\cup$(B\A) naziva se simetrična razlika i najčešće se obeležava sa Δ.

AΔ B= (A\B)$\cup$(B\A). Na dijagramu je:



Za naš primer je **AΔ B={1,4}**

PARTITIVNI SKUP

Skup svih podskupova skupa A naziva se **partitivni skup** skupa A i obeležava se sa P(A).

Primer:

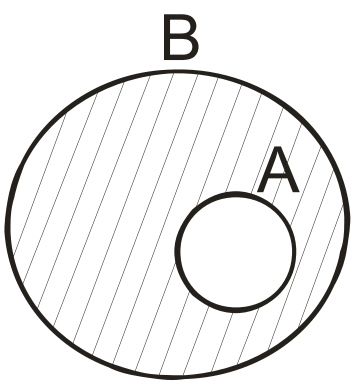
Ako je A={1,2,3) , onda je P(A)={ $\emptyset$, {1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3}, {1,2,3}}

KOMPLEMENT SKUPA

Unija , presek i razlika su binarne skupovne operacije, dok je komplement skupa unarna operacija. To je skup svih elemenata koji nisu sadržani u posmatranom skupu.

Komplement najčešće obeležavamo sa $\overline{A}$

Na slici bi bilo:



$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

Primer: Ako je A={1,3,7} i B={1,2,3,4,5,6,7} onda je :

$\overline{A} = \{2,4,5,6\}$

DEKARTOV PROIZVOD

Čuveni francuski filozof i matematičar Dekart je u matematiku uveo pojam pravouglog koordinatnog sistema, koji se i danas, u njegovu čast, naziva Dekartovim koordinatnim sistemom. U tom sistemu svakoj tački ravni odgovara jedan uređeni par realnih brojeva

(x,y) i, obrnuto, svakom paru brojeva (x,y) odgovara tačno jedna tačka u koordinatnoj ravni. Prvi broj x u tom paru nazivamo prvom koordinatom (apscisom) , a drugi y , drugom koordinatom (ordinatom). Za uređene parove je karakteristična osobina:

(x,y)=(a,b) ako i samo ako x=a $\wedge$ y=b

Dekartov proizvod skupova je skup:

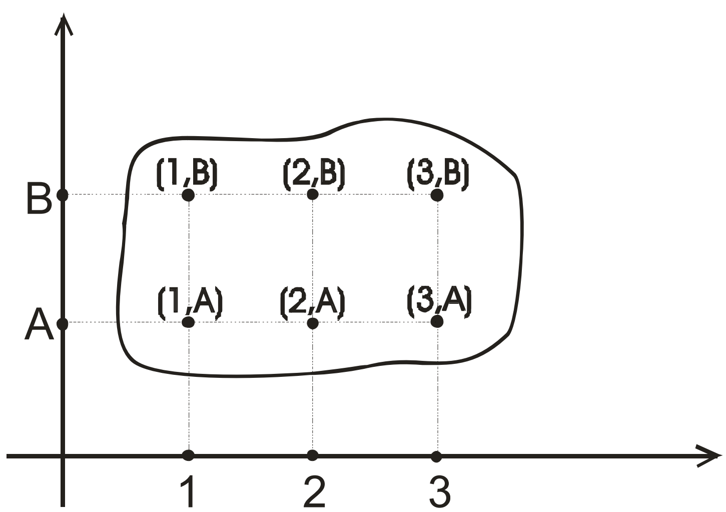
$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Treba voditi računa da $\mathbf{A} \times B \neq B \times \mathbf{A}$

Primer:

Ako je M={1,2,3} i N={A,B} onda je:

M×N={(1,A),(1,B),(2,A),(2,B),(3,A),(3,B)}. Na slici:



ZADACI

1. **Dokazati da je prazan skup podskup svakog skupa**.

Dokaz:

Mi ustvari trebamo dokazati da važi: $\varnothing \subset A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$
Kako prazan skup nema elemenata, to je istinitosna vrednost $x \in \varnothing$ sigurno netačna.
Dakle $\perp \Rightarrow x \in A$, podsetimo se tablice za implikaciju:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

Implikacija je netačna jedino u slučaju kada je iskaz p tačan i iskaz q netačan.

Iz laži sledi sve, odnosno iz netačnog sledi sve(uvek tačno)

Dakle, prazan skup je podskup svakog skupa.

2. Dati su skupovi: A={x | x se sadrzi u 12, x pripada N}, B={x | x se sadrzi u 20, x pripada N} i skup C={x| x se sadrzi u 32, x pripada N}.
Odrediti : $A \setminus (B \cup C)$, $A \cup (B \cap C)$, i $A \setminus (B \setminus C)$

Resenje:

Najpre moramo odrediti skupove A,B, i C. Kada se x sadrži u nekom broju to drugim rečima znači da se taj broj može podeliti sa x.
Kako se broj 12 može podeliti sa 1,2,3,4,6,12 to je :
A={1,2,3,4,6,12}, slično je B={1,2,4,5,10,20} i C={1,2,4,8,16,32}

Odredimo $A \setminus (B \cup C)$. Najpre je $B \cup C$={1,2,4,5,8,10,16,20,32}. Sada tražimo one koji su elementi skupa A a ne pripadaju $B \cup C$. To su 3,6,12, pa je $A \setminus (B \cup C)$={3,6,12}

Odredimo $A \cup (B \cap C)$. Najpre naravno $B \cap C$, to su elementi koji su zajednički za ova dva skupa, dakle: $B \cap C$={1,2,4}. Dalje tražimo uniju skupa A i ovog skupa, to jest sve elemente iz oba skupa: $A \cup (B \cap C)$={1,2,3,4,6,12}.

$A \setminus (B \setminus C)$= {1,2,3,4,6,12}\({1,2,4,5,10,20}\{1,2,4,8,16,32})
= {1,2,3,4,6,12}\{{5,10,20}
= {1,2,3,4,6,12}=A

3. Dati su skupovi $A=\{1,2,3,4,5\}$ i $B=\{4,5,6,7\}$. Odrediti skup X tako da bude:
$X \setminus B=\emptyset$ i $A \setminus X=\{1,2,3\}$

Rešenje:

Izgleda da ćemo ovde imati više mogućnosti za traženi skup X.

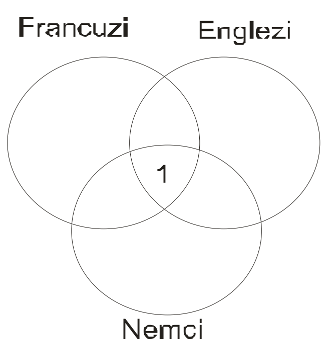
Kako je $X \setminus B=\emptyset$, to nam govori da su svi elementi skupa B potencijalni elementi skupa X jer nema takvih elemenata da su u X a nisu u skupu B.
$A \setminus X=\{1,2,3\}$ nam govori da u skupu X sigurno nisu elementi $\{1,2,3\}$.Dakle:
$X=\{4,5\}$ ili $X=\{4,5,6\}$ili $X=\{4,5,7\}$ili $X=\{4,5,6,7\}$

4. Na jednom kursu stranih jezika svaki slušalac uči bar jedan od tri strana jezika(engleski, francuski i nemački) i to : 18 slušalaca uči francuski, 22 uči engleski, 15 slušalaca uči nemački, 6 slušalaca uči engleski i francuski, 11 slušalaca engleski i nemački, 1 slušalac uči sva tri jezika.Koliko ima slušalaca na tom kursu i koliko od njih uči samo dva jezika?

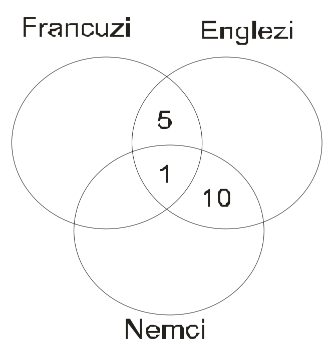
Rešenje: Najpre zapišimo pregledno podatke:

- 18 slušalaca uči francuski
- 22 uči engleski
- 15 slušalaca uči nemački
- 6 slušalaca uči engleski i francuski
- 11 slušalaca engleski i nemački
- 1 slušalac uči sva tri jezika

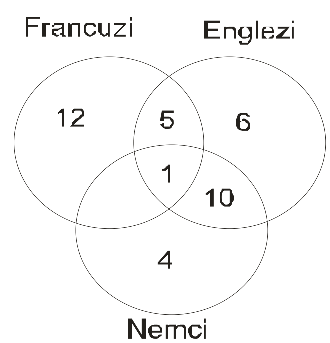
Najbolje je upotrebiti Venov dijagram sa tri skupa(njega popunjavamo tako što popunimo presek sva tri skupa, pa preseke po dva skupa, i na kraju, elemente koji pripadaju samo po jednom skupu)



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Prvo upisemo 1 u preseku sva tri skupa.(slika 1.)
Zatim presek Francuzi i Englezi, ali tu ne pisemo 6, vec 6-1=5, onda presek Englezi i Nemci 11-1=10.(slika 2.)
Dalje je ostalo 18-5-1=12 koji uče samo francuski, 22-10-5-1=6 koji uče engleski i na kraju 15-10-1=4 koji uce nemacki. (slika 3.)
Broj slušaoca je 12+5+6+1+10+4=38, a broj onih koji uče samo dva jezika je 10+5=15

5. **Dokazati skupovnu jednakost**:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Ovde uvek krećemo isto ($\forall$ x) x pripada levoj strani, = zamenimo sa $\Leftrightarrow$, pa x pripada desnoj strani. Koristimo definicije skupovnih operacija dok potpuno ne rastavimo obe strane. Dalje preko logickih operacija dokažemo da je nastala formula tautologija.
Pazi: = menjamo sa $\Leftrightarrow$, $\cup$ menjamo sa $\vee$, $\cap$ menjamo sa $\wedge$, itd.
Dokaz:

$(\forall x)\ (x \in (A \cup B) \cap C) \Leftrightarrow (x \in (A \cap C) \cup (B \cap C))$

$(x \in (A \cup B) \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in (A \cap C) \vee x \in (B \cap C))$

$((x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C))$

neka je: $p = x \in A$
$q = x \in B$
$r = x \in C$

Dobili smo formulu: **F: $((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$**
Nju sad moramo dokazati preko tablice i upotrebom logickih operacija:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
T	$\perp$	T	T	T	T	$\perp$	T	T
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	T	T	$\perp$	T	T	T
$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

Formula JESTE TAUTOLOGIJA, pa je time dokaz završen.

$\Leftrightarrow$

6. **Dokazati skupovnu jednakost:**

$$C\backslash(A \cap B)=(C\backslash A) \cup (C\backslash B)$$

Dokaz: $(\forall x)(x \in C\backslash(A \cap B)) \Leftrightarrow (x \in (C\backslash A) \cup (C\backslash B))$
$(x \in C \wedge x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow (x \in (C\backslash A) \vee x \in (C\backslash B))$
$(x \in C \wedge \neg (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow (x \in C \wedge \neg(x \in A)) \vee (x \in C \wedge \neg(x \in B))$

neka je: $p = x \in A$
$q = x \in B$
$r = x \in C$
F: $\mathbf{(r \wedge \neg (p \wedge q)) \Leftrightarrow ((r \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg q))}$

Ovo dokazujemo tablicno:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$r \wedge \neg (p \wedge q)$	$r \wedge \neg p$	$r \wedge \neg q$	$(r \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg q)$	F
T	T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
T	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	T	T	$\perp$	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T	$\perp$	T	T
$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	$\perp$	T	T	T	T	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

$\Leftrightarrow$

Dakle ova formula jeste TAUTOLOGIJA, pa je početna skupovna jednakost **tačna**.