

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Први разред – А категорија

1. За реалне бројеве a, b, c важе неједнакости

$$|b - c| \geq |a|, |c - a| \geq |b|, |a - b| \geq |c|.$$

Доказати да је један од бројева a, b, c једнак збиру преостала два.

2. У троугао ABC са страницама $BC = a, CA = b$ и $AB = c$ уписан је круг. Једна тангента тог круга сече странице AC и BC у тачкама P и Q , редом. Одредити обим троугла PQC .

3. Наћи сва целобројна решења једначине

$$6(6a^2 + 3b^2 + c^2) = 5d^2.$$

4. Нека је $ABCD$ четвороугао такав да важи

$$\sphericalangle BCA + \sphericalangle CAD = 180^\circ \text{ и } AB = AD + BC.$$

Доказати да је $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD = \sphericalangle CDA$.

5. На одбојкашком турниру учествовало је 10 екипа. Свака од њих одиграла је по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. На крају турнира, прва екипа имала је x_1 победа и y_1 пораза, друга екипа x_2 победа и y_2 пораза, итд. Доказати да је

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2.$$

(Одбојкашка утакмица се не може завршити нерешеним резултатом.)

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Други разред – А категорија

1. Доказати да за све реалне бројеве α, β, γ важи неједнакост

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 1.$$

2. Наћи све реалне бројеве a за које једначина

$$x^2 + y^2 = a(x + 1)(y - 1)$$

има решења у скупу реалних бројева.

3. Наћи све узајамно просте природне бројеве a и b такве да важи: ако се децималном запису броја a здесна допише зарез, а затим се напише децимални запис броја b , добија се децимални запис броја $\frac{b}{a}$.

4. Кружница k_1 са центром у O_1 и полупречником r и кружница k_2 са центром у O_2 и полупречником $2r$ додирују се изнутра. Тетива AB кружнице k_2 изабрана је тако да додирује кружницу k_1 у тачки T и да је $AT^2 + BT^2$ највећи могућ. Ако је $\sphericalangle ATO_2$ туп, одредити $\sphericalangle ATO_2$.

5. Нека су m и n природни бројеви. Табла димензије $n \times n$ обојена је на шаховски начин, тако да је поље у десном доњем углу бело. Аца и Бане играју следећу игру. У сваком потезу, Аца мења боју свим пољима једне врсте, а затим Бане мења боју свим пољима једне колоне (приликом промене боје, црна поља постају бела, а бела постају црна). Доказати да Бане може играти тако да после m одиграних потеза број црних поља на табли буде паран.

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Трећи разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} &= y^2 \cdot \sqrt[3]{y^2}, \\y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} &= \sqrt[3]{x^2}.\end{aligned}$$

2. Нека су N и S дијаметрално супротне тачке кружнице \mathcal{C} и нека је t тангента кружнице \mathcal{C} у тачки S . Кружница k са центром у O сече кружницу \mathcal{C} у тачкама A и B и ортогонална је на њу. Праве NA , NB и NO секу праву t у тачкама A' , B' и O' , редом. Доказати да је тачка O' средиште дужи $A'B'$.
(Кружнице γ_1 и γ_2 су ортогоналне ако се секу у тачкама X и Y и при томе су њихове тангенте у тачки X међусобно нормалне.)

3. Наћи све природне бројеве x за које

$$x \mid [(x-1)\sqrt{x}].$$

(Са $[x]$ означен је цео део броја x .)

4. Унутар троугла ABC на симетрали угла ACB уочена је тачка M таква да је

$$\sphericalangle MBA = \sphericalangle MAC = 30^\circ.$$

Доказати да је $\sphericalangle ACB \leq 60^\circ$.

5. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Одредити број различитих начина на који се табла димензије $2 \times n$ може поплочати доминама (правоугаоникима димензије 1×2 и 2×1) и квадратима димензије 2×2 .
(У попловавању табле свако поље прекривено је тачно једном домином или квадратом.)

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Четврти разред – А категорија

1. Тело T запремине $\alpha \in (0, 1)$ садржано је у јединичној коцки I . Доказати да постоје коцке K_1 и K_2 за које важи:
 - 1° $K_1, K_2 \subseteq I$;
 - 2° K_1 и K_2 немају заједничких унутрашњих тачака;
 - 3° збир дужине ивице коцке K_1 и дужине ивице коцке K_2 једнак је 1;
 - 4° запремина дела тела T који се налази у K_1 једнака је запремини дела тела T који се налази у K_2 .
2. Кошаркаш гађа кош четири пута. Вероватноћа поготка приликом сваког гађања је $1/2$, осим уколико кошаркаш промаши оба пута у прва два бацања, када је вероватноћа поготка у сваком наредном покушају $2/3$.
 - а) Одредити расподелу вероватноћа броја погодака у четири бацања.
 - б) Колика је вероватноћа да је кошаркаш погодио у трећем покушају ако се зна да је имао тачно три поготка?
3. Наћи све парове различитих простих бројева p и q за које је
$$5pq - 1$$
пети степен целог броја.
4. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао за који важи $AD = AB$ и нека је X тачка на страници CD таква да је $\sphericalangle XAD = \sphericalangle ADB$. Доказати да је
$$AX^2 - XD^2 = BC \cdot XD.$$
5. Једнакокраки траpez чије су основице дужина 1 и 5, а крак дужине $\sqrt{7}$, прекривен је са 10 подударних кругова полупречника r . Доказати да је $r \geq \frac{1}{2}$.

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Први разред – Б категорија

1. Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задата је са $f(2x + 1) = 4x^2 + 4x$, за $x \in \mathbb{R}$.
 - а) Одредити $f(3)$.
 - б) Одредити $f(x)$, за све $x \in \mathbb{R}$.
 - в) Да ли је функција f 1-1 и на-функција?

2. Испитати да ли је формула

$$(p \Leftrightarrow (q \vee r)) \Rightarrow ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$$

таутологија.

3. Група од 300 људи са одређеним тегобама учествује у испитивању такозваног плацебо ефекта. Одређеном броју људи из ове групе дат је одговарајући лек, а преосталима лажни лек (лек који нема никакво дејство). Наравно, нико није знао да ли је добио прави или лажни лек. Испоставило се да је 20% оних који су добили прави лек рекло да не осећа никакво побољшање, док су преостали рекли да им је боље. Двадесет посто оних који су добили лажни лек је потврдило да им је боље, док су преостали из ове групе рекли да не уочавају никакву промену. Ако је укупно 40% људи који су учествовали у експерименту потврдило побољшање сопственог стања, одредити колико њих је добило прави лек, а колико лажни.
4. Колико има 100-цифрених бројева који се записују цифрама 1, 2 и 3 тако да им никоје две суседне цифре нису једнаке?
5. Три Енглеца и два Француза заинтересовани су за седам различитих књига: три на енглеском језику (траже их само Енглеци), две на француском језику (траже их само Французи) и две на српском језику (траже их и Енглеци и Французи). На колико начина сваком од њих можемо поклонити по једну књигу?

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве z такве да важи

$$|z + 2| = |1 - \bar{z}| \text{ и } \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2 + 3i}\right) = \frac{1}{13}.$$

2. Нека је BH висина троугла ABC . Круг k , чији је центар на дужи BH , садржи тачке B и C и сече страну AB у тачки E ($E \neq B$). Ако је дужина дужи AB једнака 16, а дужина дужи BC једнака 12, одредити дужину дужи AE .

3. Одредити број целобројних решења неједначине

$$|x^2 - 9x - 1| \leq \sqrt{21}.$$

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ тачке P, Q, R, S изабране су на правама BC, CD, DA, AB , редом, тако да важи

$$\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CQ} : \overrightarrow{CD} = 1 : 2, \quad \overrightarrow{DR} : \overrightarrow{DA} = 2 : 1, \quad \overrightarrow{AS} : \overrightarrow{AB} = 3 : 2.$$

Ако се праве AP, BQ, CR, DS секу у тачки O , одредити $AO : OP$.

5. У две једнаке кутије је смештено укупно 65 црвених, зелених, жутих и плавих лопти. Поред тога што су различитих боја, лопте се могу разликовати и по величини. При томе, међу сваких пет лопти исте боје извучених из једне кутије, бар две су исте величине. Доказати да постоје бар три лопте које се налазе у истој кутији и које су исте боје и величине.

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Трећи разред – Б категорија

1. За које вредности реалног параметра a систем једначина

$$\begin{aligned}2x - y + z + t &= 0 \\x + 2y - z + 4t &= 2 \\x + 7y - 4z + 11t &= a\end{aligned}$$

има решења у скупу реалних бројева?

2. Нека је S врх тростране пирамиде $SABC$ такве да је

$$SA = SB = SC = a, \angle ASB = 60^\circ, \angle ASC = 90^\circ, \angle BSC = 120^\circ,$$

где је $a \in \mathbb{R}^+$.

- а) Доказати да је троугао ABC правоугли.
б) Одредити површину пирамиде $SABC$.

3. Одредити све природне бројеве x и y за које је

$$2014^x + 11^x = y^2.$$

4. Одредити све реалне бројеве $x \geq y \geq 1$ за које важи

$$2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0.$$

5. За екипу једне школе у шаху треба изабрати три такмичара од 11 кандидата међу којима је 6 дечака и 5 девојчица. На колико начина се то може учинити ако се зна да у екипи мора бити барем једна девојчица?

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

25.01.2014.

Четврти разред – Б категорија

1. За комплексан број z важи

$$\arg(z + 3) = \frac{\pi}{3}.$$

Одредити најмању могућу вредност $|z|$.

2. Ротацијом координатне равни за угао α око тачке M тачка $A(1, 2)$ се пресликава у тачку $A_1(6, 5)$, а тачка $B(1, 4)$ у тачку $B_1(4, 5)$.

а) Одредити слику тачке $C(1, 3)$.

б) Наћи величину угла α и координате тачке M .

3. Нека је n природан број. Ако је цифра десетица броја n^2 непарна, доказати да је цифра јединица тог броја једнака 6.

4. Посматрајмо све функције $f : [1801, 2014] \rightarrow \mathbb{R}$ такве да

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \text{ за све } x, y \in [1801, 2014],$$

и $f(1801) = f(2014) = 0$. Одредити најмању вредност константе C (ако постоји), тако да за свако $x \in [1801, 2014]$ и све овакве функције f важи $f(x) \leq C$.

5. На под собе чија је површина 5 постављено је 9 тепиха. Теписи су произвољног облика, а површина сваког је 1. Очигледно, неки теписи се морају преклапати. Доказати да постоје два тепиха за које је површина њиховог преклопа бар $\frac{1}{9}$.

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.