Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Први разред – А категорија

1. Аца, Бранка, Вера и Горан су од наставника математике добили задатак да израчунају количник два позитивна реална броја, и то: Аца да израчуна $a_1 : a_2$, Бранка да израчуна $b_1 : b_2$, Вера да израчуна $v_1 : v_2$, а Горан да израчуна $g_1 : g_2$. Наставник је на табли израчунао количник $(a_1 + b_1 + v_1 + g_1) : (a_2 + b_2 + v_2 + g_2)$. Испоставило се да ниједан од количника који су добили ученици није био већи од оног који је добио наставник (ученици и наставник су тачно израчунали своје количнике). Да ли количници које су добили Бранка и Горан могу бити различити?

2. Конструисати троугао ABC ако су дате две његове странице a и b тако да је величина угла наспрам једне од ових страница три пута већа од величине угла наспрам друге странице.

3. Одредити све природне бројеве k, m и n за које важи

$$2^k + 10^m - 10^n = 2014.$$

4. У троуглу ABC симетрала угла код темена A сече страницу BC у тачки D. Нормала из тачке B на праву AD сече описану кружницу троугла ABD у тачки $E \neq B$. Доказати да центар O описане кружнице троугла ABC лежи на правој AE.

5. У Лудој шуми живело је 6 вукодлака, 17 једнорога и 55 паукова. Вукодлак може да поједе паука и једнорога, али не и другог вукодлака, паук може да поједе једнорога, али не и вукодлака или другог паука, а једнорог не може да поједе ни вукодлака ни паука ни другог једнорога. Када год вукодлак поједе паука, претвара се у једнорога, а када поједе једнорога, претвара се у паука; такође, када паук поједе једнорога, постаје вукодлак. Колико највише створења може остати у шуми када више нико никог не буде могао да поједе?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Други разред – А категорија

1. Да ли постоје квадратне функције $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је збир ма које две од њих квадратна функција која има бар једну реалну нулу, а збир све три квадратна функција која нема реалних нула?

2. Нека су AB и CD дужи дужине 1 које се секу у тачки O и при томе важи $\sphericalangle AOC = \frac{\pi}{3}$. Доказати да је

$$AC + BD \geqslant 1.$$

3. Одредити највећи заједнички делилац свих бројева из скупа

$$\{(n+2014)^{n+2014} + n^n \mid n \in \mathbb{N},\ n > 2014^{2014}\}.$$

4. Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5$ тетивни петоугао чији су сви унутрашњи углови тупи. Нека су S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 центри уписаних кружница троуглова $A_5A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$ и $A_4A_5A_1$, редом. Доказати да су сви унутрашњи углови петоугла $S_1S_2S_3S_4S_5$ тупи.

5. За становнике планете P, којих можда има и бесконачно много, важи следеће:

(1) сваки становник воли тачно једног и поштује тачно једног становника;

(2) ако становник A воли становника B, онда сви становници који поштују становника A воле становника B;

(3) ако становник A поштује становника B, онда сви становници који воле становника A поштују становника B;

(4) за сваког становника постоји неко ко га воли.

Да ли је обавезно тачно да сваки становник воли онога кога поштује? (Становник може поштовати или волети себе.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су x, y, z реални бројеви такви да важи $x + y + z = 0$. Доказати да важи неједнакост

$$6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)^3.$$

2. Нека су $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такви да је $0 \leqslant k \leqslant n$. Доказати да важи

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} + \sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = 2^{n+1}.$$

3. Знајући да важи

$$(4005 \cdot 6!)^3 = (5\,021\,004\,40a\,22b\,000\,000\,000\,000)_6,$$

одредити цифре a и b.
(За целе бројеве $0 \leqslant a_0, a_1, \ldots, a_k \leqslant 5$ ознака $(a_k \ldots a_1 a_0)_6$ представља запис броја у бази са основом 6.)

4. Тачка D унутар оштроуглог троугла ABC изабрана је тако да важи $AD = BD$. Нека је тачка E пресек правих CD и AB. Ако је $AE : EB = CD : CE$, доказати да је $CB = CE$.

5. У некој земљи живи коначно много становника. Сваки од њих воли бар једног и поштује бар једног становника (не обавезно истог). Познато је да:

(1) ако становник A воли становника B, онда сви становници који поштују становника A воле становника B;

(2) ако становник A поштује становника B, онда сви становници који воле становника A поштују становника B.

Доказати да постоји становник који воли себе.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све тројке позитивних реалних бројева (a, b, c) такве да једначина

$$a^x + b^x + c^x = 3$$

има барем три различита решења у скупу реалних бројева.

2. За природне бројеве k и n означимо са $d_k(n)$ број делилаца броја n не мањих од k. Одредити

$$d_1(2015) + d_2(2016) + d_3(2017) + \ldots + d_{2014}(4028).$$

3. Одредити највећи природан број k такав да постоји природан број $n \geqslant k$ за који је сваки од бројева

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$$

потпун квадрат.

4. На кружници k_0 дате су тачке A, B и C. Кружнице k', k'' и k''' нормалне су на кружницу k_0, и притом k' пролази кроз A и B, k'' кроз A и C, а k''' кроз B и C. На кружници k''' дата је тачка $P \notin \{B, C\}$, а потом су повучене кружнице k_1 и k_2 које пролазе кроз P и које су нормалне на k_0, при чему је k_1 нормална и на k', а k_2 на k''. Доказати да су кружнице k_1 и k_2 међусобно нормалне. (Кружнице γ_1 и γ_2 су нормалне ако се секу у тачкама X и Y и при томе су њихове тангенте у тачки X међусобно нормалне.)

5. Играчи A и B наизменично замењују звездице у

$$\star 1 \star 2 \star 2^2 \star 2^3 \star \ldots \star 2^{999} \star 2^{1000}$$

знацима + и −. Играч B побеђује ако је по завршетку игре вредност добијеног израза дељива са 17. У супротном побеђује играч A. Ако играч A почиње игру, како треба да игра да би сигурно победио?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Први разред – Б категорија

1. За скупове A, B, C, нека је

$$P = (A \setminus B) \cup C \quad \text{и} \quad Q = (A \cup C) \setminus B.$$

Испитати да ли за све овакве скупове важи нека од релација $P \subseteq Q$, $P = Q$ или $Q \subseteq P$.

2. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB = AF$, $BC = CD$ и $DE = EF$. Доказати да се симетрале углова BAF, BCD и DEF секу у једној тачки.

3. У скупу целих бројева решити једначину

$$9a^2 - b^2 + 6b = 2014.$$

4. Нека је ABC троугао такав да важи $\sphericalangle ABC \geqslant \sphericalangle BCA$. Симетрала угла код темена A овог троугла сече страницу BC у тачки D. Нормала из тачке B на праву AD сече описану кружницу троугла ABD у тачки $E \neq B$. Доказати да центар O описане кружнице троугла ABC лежи на правој AE.

5. На стоваришту се налази 80 балвана. Неки имају дужину 3m, неки 4m, неки 5m, а неки 6m. Познато је да балвана дужине 4m има дупло више од балвана дужине 5m. Укупна дужина свих балвана је 345m. Све балване треба разрезати на комаде дужине 1m. Колико резова треба направити (једним резом може се разрезати само један балван)?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{\frac{7x-1}{x}} > \frac{x-1}{x}\,.$$

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x^2+x+3)(x^2+3x+3) = 3x^2.$$

3. У скупу целих бројева решити једначину

$$3a^2+3a+2014 = b^3.$$

4. Нека је I центар уписаног круга, а AE симетрала угла BAC троугла ABC (E је на дужи BC). Доказати да важи

$$\frac{AI}{IE} = \frac{AC+AB}{BC}\,.$$

5. Нека је n природан број већи од 2. Колико има тројки (A, B, C) подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је

$$A\cap B\cap C = \emptyset, \quad |A\cap B| = 2 \quad \text{и} \quad |A\cap C| = 1\,?$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је $a = -1 + i\sqrt{3}$, $b = -1 - i\sqrt{3}$, $c = 2$ и n природан број који није дељив са 3. Одредити $a^n + b^n + c^n$.

2. Нека су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ненула вектори и $\vec{a} = \vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{b} = 7\vec{m}-5\vec{n}$, $\vec{c} = \vec{m}-4\vec{n}$, $\vec{d} = 7\vec{m} - 2\vec{n}$. Ако је $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{c} \perp \vec{d}$:

а) доказати да је $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

б) одредити угао између вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

3. Нека је a рационалан број већи од $\dfrac{4}{3}$. Ако је x реалан број такав да су $x^2 - ax$ и $x^3 - ax$ рационални бројеви, доказати да је x рационалан број.

4. Сваке две од кружница k_1, k_2 и k_3 додирују се међусобно споља и свака од њих додирује кружницу k изнутра. Ако су O_1, O_2, O_3 и O центри кружница k_1, k_2, k_3 и k, редом, доказати да је O центар кружнице уписане у троугао $O_1O_2O_3$ ако и само ако кружнице k_1, k_2 и k_3 имају једнаке полупречнике.

5. Свака од машина А, Б и В може да прочита картицу на којој је уписан пар целих бројева (m, n) и да затим одштампа нову картицу. При томе,

(1) ако машина А учита картицу на којој је пар (m, n), она штампа нову картицу са паром $(m - n, n)$;

(2) ако машина Б учита картицу на којој је пар (m, n), она штампа нову картицу са паром $(m + n, n)$;

(3) ако машина В учита картицу на којој је пар (m, n), она штампа нову картицу са паром (n, m);

На почетку је дата картица на којој је уписан пар $(19, 81)$. Да ли је могуће употребом ове три машине у произвољном поретку добити картицу на којој је уписан пар:

а) $(7, 13)$; б) $(12, 21)$?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

8.2.2014.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да за $x > 1$ важи неједнакост

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}\,.$$

2. Нека је $ABCDV$ пирамида чија је основа $ABCD$ конвексан четвороугао са нормалним дијагоналама. При томе, подножје висине пирамиде налази се у пресеку дијагонала четвороугла $ABCD$. Ако су α, β, γ и δ углови које висина заклапа са бочним странама ABV, BCV, CDV и DAV, редом, доказати да је

$$\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\gamma = \mathrm{ctg}^2\beta + \mathrm{ctg}^2\delta.$$

3. Нека су x и y цели бројеви такви да је број $3x + 7y$ дељив са 19. Доказати да је и број $43x + 75y$ дељив са 19.

4. Нека је R полупречник споља приписане кружнице која одговара хипотенузи правоуглог троугла ABC. Доказати да је

$$\frac{R}{c} \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2},$$

где је c дужина хипотенузе троугла ABC.
(Споља приписана кружница која одговара хипотенузи троугла је кружница која додирује хипотенузу и продужетке катета.)

5. Функција $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$ дефинисана је на следећи начин: ако су $p_1, p_2, \ldots, p_k$ различити прости бројеви и $\alpha_i \in \mathbb{N}$, за $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, онда је

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}) = p_1^{\alpha_1^2} p_2^{\alpha_2^2} \ldots p_k^{\alpha_k^2}.$$

Доказати да важи:

а) $f(ab) \leqslant (f(a) \cdot f(b))^2$, за све $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

б) $f(a^{2^n}) = (f(a))^{4^n}$, за све $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.