ZADACI VI разред

1. Вера је помножила пет једноцифрених бројева и то множење записала на папиру. Када је изашла из учионице Славољуб је обрисао две цифре у том запису и уместо њих записао друге две цифре. Када се вратила у учионицу Вера је на папиру затекла следећи запис:

$$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247.$$

Које множење је Вера записала пре Славољубових исправки?

2. У оштроуглом троуглу ABC тачка H је ортоцентар троугла, а тачка O центар описаног круга око троугла ABC. Нека је D тачка таква да је $ADBH$ паралелограм. Докажи да је O средиште дужи CD.

3. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AB = BC$). На полуправим CA, AB и BC означене су редом тачке D, E и F такве да је $AD = AC$, $BE = BA$, $CF = CB$. Израчунај збир углова ADB, BEC и CFA.

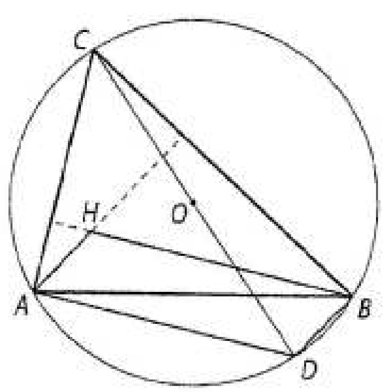
4. На свакој страници троугла дате су по 4 тачке, тако да се ниједна не поклапа са теменом троугла. Колико је троуглова одређено овим тачкама?

5. У математичкој секцији је било 25 чланова. Када се у секцију уписало 7 нових чланова, проценат девојчица у секцији повећао се за 10. Колико је после тога било девојчица у математичкој секцији?

REŠENJA VI разред

1. У Верином запису је постојала бар једна четворка на левој страни (јер су промењене укупно две цифре), па је број на десној страни морао бити паран. Дакле, уместо цифре 7 стајала је нека парна цифра. Следи да је на левој страни промењена највише једна цифра, па је у Верином запису постојала бар једна петица. На основу тога закључујемо да је уместо седмице на десној страни била нула. Друга промењена цифра није могла бити на десној страни, јер би онда лева страна била непромењена, а како је $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1600$, на десној страни би све цифре биле промењене. Дакле, друга промењена цифра је на левој страни. Како је у том случају број на десној страни једнак $2240 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7$, следи да је на левој страни уместо петице била седмица. Дакле, Верин запис је био $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$ или $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$.

2. С обзиром да је $ADBH$ паралелограм и да је $BH \perp AC$, то је и $AD \perp AC$, тј. $\measuredangle DAC = 90°$, па је центар круга описаног око правоуглог троугла DAC средиште хипотенузе DC. Аналогно се доказује да је троугао DBC правоугли и да је средиште хипотенузе CD центар круга описаног око тог троугла. С обзиром да пречник CD одређује један круг то се кругови описани око троуглова DAC и BDC међусобно поклапају. Како тачке A, B и C припадају том кругу, то је CD и пречник круга описаног око троугла ABC, па је тачка O средиште дужи CD.



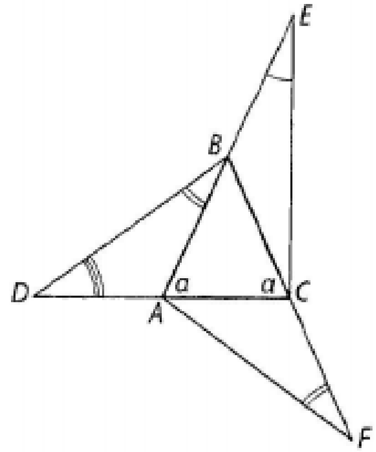
3. Означимо са α угао на основици троугла (слика). Троуглови ADB и ACF су подударни (СУС), одакле је $\measuredangle DBA = \measuredangle AFC$, па је

$$\measuredangle ADB + \measuredangle AFC = \measuredangle ADB + \measuredangle DBA = \alpha. \qquad (1)$$

С друге стране, троугао BEC је једнакокрак, па је

$$\measuredangle BEC = 90^\circ - \alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следи да је тражени збир једнак 90°.



4. Одредимо најпре број троуглова чија два темена припадају једној страници датог троугла. Ту страницу можемо изабрати на 3 начина, а (ако је то страница на којој су тачке P, Q, R, S) два темена на њој можемо изабрати на 6 начина (PQ, PR, PS, QR, QS, RS). Треће теме може бити било које од преосталих 8 тачака, па је број таквих троуглова $3 \cdot 6 \cdot 8 = 144$.
Посматрајмо сада троуглове чија сва три темена припадају различитим страницама датог троугла. На свакој од тих страница по једно теме можемо изабрати на 4 начина. Таквих троуглова зато има $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
Укупан број троуглова је $144 + 64 = 208$.

5. *Решење 1.* Нека је на почетку у секцији било x девојчица и нека је међу новим чановима y девојчица ($y \le 7$). Тада је

$$\frac{x+y}{32} - \frac{x}{25} = \frac{1}{10}.$$

После сређивања добијамо да је $25y - 7x = 80$, тј. $7x = 5 \cdot (5y - 16)$, па је број $5 \cdot (5y - 16)$ дељив са 7, а самим тим и број $5y - 16$ је дељив са 7. Како је $5y - 16 = 5y + 5 - 21 = 5 \cdot (y + 1) - 21$, то $y + 1$ мора да је дељиво са 7, одакле је $y = 6$. Сада добијамо да је $x = 10$, па закључујемо да је у секцији, после уписа нових чланова, било 16 девојчица.
Решење 2. Добијену једначину $25y - 7x = 80$ из решења 1 можемо записати у облику $7x = 25y - 80$, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Јасно је да не може бити $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ (десна страна једначине би била негативна). Провером за $y \in \{4, 5, 6, 7\}$ се целобројна вредност за x добија једино за $y = 6$. Тада је $x = 10$, па је тражени број девојчица 16.

ZADACI VII разред

1. Одреди све реалне бројеве x, y и z такве да важи:

$$xy + yz + zx = 2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1}.$$

2. Нека је O центар описане кружнице око правилног петоугла $ABCDE$. Докажи да кружница описана око троугла ABO садржи тачке пресека два пара дијагонала петоугла.

3. На једном тестирању 67 ученика решавало је 6 задатака. Одговори на сва питања су ДА или НЕ. За тачно решен задатак под редним бројем k ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) ученик добија k поена, а за нетачно решен задатак одузима му се k поена.

а) Докажи да је бар четворо ученика остварило исти број поена на тестирању.

б) Докажи да је бар двоје ученика имало исте одговоре на сваком од шест задатака.

4. На крацима AB и AC једнакокраког троугла ABC означене су редом тачке K и L тако да је $AK = CL$ и $\measuredangle ALK + \measuredangle LKB = 60°$. Докажи да је $KL = BC$.

5. На две клупе седи по шесторо деце. Сви имају различит број година и број година сваког детета је цео број. Збир и производ броја година деце са једне клупе једнак је збиру, односно производу броја година деце са друге клупе. Најстарије дете има 16 година. Колико година имају деца која седе на истој клупи са њим?

REŠENJA VII разред

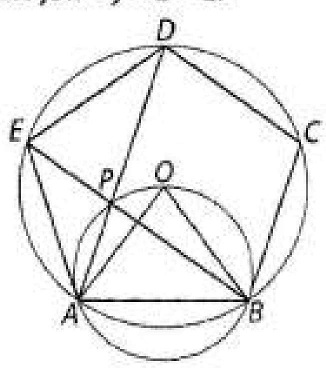
1. Једначина је добро дефинисана ако је $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$. Груписањем одговарајућих чланова једначине добијамо

$$x(y - 2\sqrt{y-1}) + y(z - 2\sqrt{z-1}) + z(x - 2\sqrt{x-1}) = 0,$$

$$x((y-1) - 2\sqrt{y-1} + 1) + y((z-1) - 2\sqrt{z-1} + 1) + z((x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1) = 0,$$

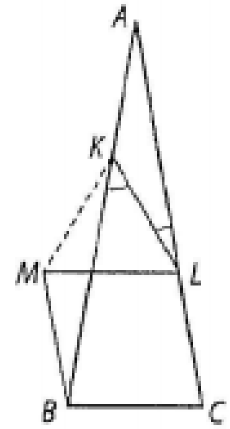
$$x(\sqrt{y-1} - 1)^2 + y(\sqrt{z-1} - 1)^2 + z(\sqrt{x-1} - 1)^2 = 0.$$

Како је лева страна увек ненегативна и због услова дефинисаности једначине, важи да изрази у заградама морају бити једнаки 0, одакле је $x = y = z = 2$.



2. Означимо са P пресек дијагонала AD и BE. У правилном петоуглу је $\measuredangle EAB = 108°$ и $\measuredangle AOB = 72°$. $\measuredangle AEB = \measuredangle ABE = \measuredangle EAD = 36°$ (периферијски углови над једнаким тетивама), па је $\measuredangle PAB = \measuredangle EAB - \measuredangle EAD = 72°$. У троуглу ABP је $\measuredangle APB = 180° - (\measuredangle PAB + \measuredangle ABP) = 72°$. Како је $\measuredangle APB = \measuredangle AOB$ то и тачка P припада кружници описаној око троугла AOB. Аналогно показујемо да и пресек дијагонала BD и AC припада кружници описаној око троугла AOB.

3. Коначан број бодова ученика је број облика $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6$ и припада скупу $\{-21, -19, -17, \ldots, 17, 19, 21\}$ који има 22 елемента. Ако је сваки од могућих броја бодова остварило највише три ученика, број ученика би био највише 66, одакле следи тврђење а).
Могућих распореда одговора ученика по задацима има колико и одабира предзнака $\pm$, тј. $2^6 = 64 < 67$, па су бар два ученика дала исте одговоре на сваком од шест задатака.



4. Конструишимо паралелограм $BCLM$. Троуглови AKL и BMK су подударни ($BM = LC = AK$, $BK = AL$, $\measuredangle KBM = \measuredangle A$). Следи да је у троуглу LKM: $KL = KM$, $\measuredangle LKM = \measuredangle BKM + \measuredangle LKB = \measuredangle ALK + \measuredangle LKB = 60°$. Према томе, LKM је једнакостраничан троугао, па је $KL = ML = BC$.

5. Означимо са A_1 и A_2 скупове бројева година деце на првој, односно другој клупи (при чему је, рецимо, $16 \in A_1$), а са B означимо (четворочлани скуп) $\{1, 2, \ldots, 16\} \setminus (A_1 \cup A_2)$. Збир $1 + 2 + \ldots + 16$ је паран број, а на основу услова задатка (о једнакости збирова), збир елемената скупа $A_1 \cup A_2$ такође је паран, па је паран и збир елемената скупа B.
Сви прости делиоци бројева из скупа $\{1, 2, \ldots, 16\}$ су 2, 3, 5, 7, 11 и 13, при чему се они у растављању тих бројева на просте чиниоце појављују, редом, 15, 6, 3, 2, 1 и 1 пут. На основу другог услова задатка (о једнакости производа) следи да $11, 13 \in B$. Такође, бар један члан скупа B мора бити паран и тачно један дељив са 5. То не може бити ни 5 ни 15, јер би иначе и четврти члан скупа морао бити непаран (по услову за збир), па у B не би било парног броја. Дакле, $10 \in B$. Но, онда и четврти елемент скупа В мора бити паран, али дељив са 2^2 (да би укупан преостали број двојки био паран). То не може бити 16 (по услову задатка), 8 (опет би преостали број двојки био непаран), а ни 12 (јер би тада укупан преостали број тројки био непаран). Дакле, остаје једина могућност да је $B = \{4, 10, 11, 13\}$, тј. $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16\}$.
За растављање добијеног скупа на два шесточлана дела који задовољавају услове задатка постоје две могућности: $A_1 = \{2, 3, 5, 9, 14, 16\}$ или $A_1 = \{2, 3, 6, 7, 15, 16\}$, што су и решења задатка.

ZADACI **VIII разред**

1. Одреди све парове целих бројева (m, n) за које важи $m(m+1) = n(n+2)$.

2. Докажи да је вредност полинома $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ позитивна за свако реално x.

3. Око квадрата $ABCD$ описана је кружница. Нека је EF пречник те кружнице, при чему је E тачка мањег лука AB. Нека су K и L средишта дужи CE и CB, редом. Докажи да се дужи DL и FK секу на дијагонали AC.

4. Седам риболоваца уловило је тачно 100 риба. Међу њима не постоје два која су уловила исти број риба. Докажи да су нека тројица од њих уловила заједно бар 50 риба.

5. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Одреди угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D.

REŠENJA **VIII разред**

1. Ако помножимо дату једначину са 4 и допунимо изразе до квадрата бинома, добијамо $(2n+2)^2 - (2m+1)^2 = 3$, односно $(2n-2m+1)(2n+2m+3) = 3$. Разликујемо 4 случаја из којих добијамо решења:

а) $2n - 2m + 1 = 1$, $2n + 2m + 3 = 3$, одакле је $(m, n) = (0, 0)$;

б) $2n - 2m + 1 = 3$, $2n + 2m + 3 = 1$, одакле је $(m, n) = (-1, 0)$;

в) $2n - 2m + 1 = -1$, $2n + 2m + 3 = -3$, одакле је $(m, n) = (-1, -2)$;

г) $2n - 2m + 1 = -3$, $2n + 2m + 3 = -1$, одакле је $(m, n) = (0, -2)$.

2. Разликујемо три случаја: а) $x \le 0$; б) $0 < x < 1$; в) $x \ge 1$.

а) За $x \le 0$ важи $x^{12} \ge 0$, $-x^9 \ge 0$, $x^4 \ge 0$ и $-x \ge 0$, па је

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + (-x^9) + x^4 + (-x) + 1 \ge 1.$$

б) Важи да је $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x)$. Како је за $0 < x < 1$:

$$1 - x^5 > 0 \quad \text{и} \quad 1 - x > 0$$

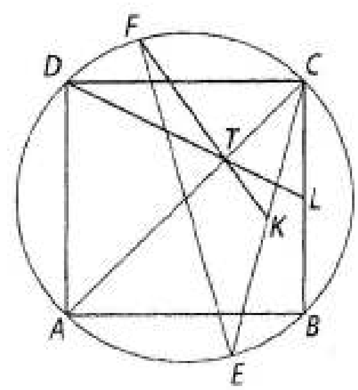
то је вредност полинома већа од 0.

в) Како је $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1$, то за $x \ge 1$ важи да је $x^3 - 1 \ge 0$, па је вредност полинома већа или једнака 1.

Дакле, вредност датог полинома је увек позитивна.

3. Нека је T тачка пресека дужи AC и DL. На основу Талесове теореме, троуглови TDA и TLC су слични, са коефицијентом сличности 2. Тачка T дели сваку од дужи AC и DL у односу $2:1$.

С друге стране, имамо да је $DF = BE = 2 \cdot LK$, $DF \parallel BE \parallel LK$ и $\measuredangle FDT = \measuredangle KLT$. Зато тачка пресека дужи DL и FK дели сваку од тих дужи у односу $2:1$. Следи да се та тачка пресека поклапа са тачком T, одакле следи тврђење.



4. Нумеришимо риболовце бројевима од 1 до 7, тако да је од два риболовца већим бројем нумерисан онај који је уловио мање риба. Последњи (седми) риболовац уловио је највише 11 риба (јер је $12 + 13 + ... + 18 = 105$). Претпоставимо да су четири последња уловила више од 50 риба. Како је $11 + 12 + 13 + 14 = 50$, следи да је у том случају четврти уловио бар 15 риба. Но, онда је улов трећег бар 16, другог бар 17 и првог бар 18, па је укупан улов свих риболоваца већи од $50 + 16 + 17 + 18 = 101$, што је немогуће. Дакле, четири последња су уловила заједно највише 50 риба, што значи да су прва тројица уловила бар 50 риба.

5. *Решење 1.* Права AD нормална је на раван DD_1C_1C. Права AD припада равни AB_1C_1D. Следи да је раван AB_1C_1D нормална на раван DD_1C_1C. Праве DC_1 и D_1C су узајамно нормалне и налазе се у равни DD_1C_1C која је нормална на раван AB_1C_1D. Следи да је права DC_1 нормална на раван AB_1C_1D. Како се права DC_1 налази у равни ACD_1 то су равни ACD_1 и AB_1C_1D узајамно нормалне, тј. заклапају угао од $90°$.

Решење 2. Права D_1C нормална је на праву DC_1 (дијагонала квадрата) и на праву PQ која спаја средишта квадрата ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ (јер је PQ паралелна са BC), па је нормална и на раван AB_1C_1D која садржи те две праве. Даље се закључује као у претходном решењу.

Решење 3. Нека је страница коцке дужине a. Приметимо да је $B_1A = B_1C = B_1D_1 = a\sqrt{2}$, као и $DA = DC = DD_1 = a$. Нека је тачка O подножје нормале из B_1 на раван троугла ACD_1. Из подударности троуглова AOB_1, COB_1, D_1OB_1 (ССУ) добијамо $OA = OC = OD_1$, па је O заправо центар једнакостраничног троугла ACD_1. На исти начин добијамо да је подножје нормале из D на раван ACD_1 такође центар O тог троугла. Дакле, права B_1D је нормална на раван ACD_1 и продире је у поменутој тачки O. Како права B_1D очигледно припада равни AB_1C_1D, важи да је и раван AB_1C_1D нормална на раван ACD_1. Тражени угао је $90°$.