VI RAZRED

2006. Opštinsko takmičenje

1. Одредити 2006-у цифру иза децималног зареза у децималном запису броја $\frac{21}{37}$.

2. При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децимални зарез за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требао да сабере?

3. У оштроуглом једнакокраком троуглу ABC дужина основице AB већа је од дужине крака BC. Симетрала угла на основици и висина из истог темена граде угао од $18°$. Колики је угао на основици тог троугла?

$AB > BC$

4. Нека је $ABCD$ правоугаоник ($AB > CD$), а тачке E и F су такве да су троуглови AED и CDF једнакостранични и тачка E припада унутрашњости и правоугаоника $ABCD$ и троугла CDF. Доказати да је троугао BEF једнакостраничан.

5. Таблица 5×5 попуњена је на произвољан начин бројевима из скупа $\{-1, 0, 1\}$. Посматрају се збирови тих бројева по врстама, колонама и обе дијагонале таблице. Доказати да међу њима бар два морају бити једнака.

Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

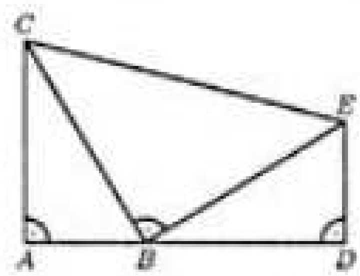
6. РАЗРЕД

1. Одредити збир целобројних решења неједначине $|x - 1| < 6$.

2. Симетрале углова BAC и ABC троугла ABC секу се под углом од $124°$. Одредити меру угла ACB.

3. Аца, Бора и Веса су имали неколико кликера у кеси. Аца је пришао и додао онолико кликера колико је било у кеси и још 1 кликер. Затим је Бора пришао и додао два пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 3 кликера. Последњи је пришао Веса и додао три пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 5 кликера. Ако је на крају у кеси било 149 кликера, колико кликера је било у кеси на почетку?

4. На дужи AD дата је тачка B, таква да су троуглови ABC и DEB правоугли, а троугао CBE једнакокрако правоугли, као на слици. Доказати да су троуглови ABC и DEB подударни.



5. У једној школи има 800 ученика. Доказати да бар три ученика имају рођендан истог датума.

2007. Okružno takmičenje

6. РАЗРЕД

1. Одредити све парове природних бројева a и b таквих да је $a+b=30$ и $\frac{2005}{2007}=\frac{198}{223}+\frac{a}{b}$.

2. Нека је $ABCD$ паралелограм код кога је $AB>BC$. Права p која садржи пресек дијагонала O и нормална је на дијагоналу BD сече страницу AB у тачки M и страницу CD у тачки N. Доказати да је четвороугао $MBND$ ромб.

3. Ако су a и b прости бројеви већи од 3 и $a>b$, доказати да је производ $(a+b)\cdot(a-b)$ дељив са 12.

4. У оштроуглом троуглу ABC тачке D и E су средишта страница AC и BC. Ако се симетрале углова ADE и BED секу на страници AB, доказати да је $AB=\frac{AC+BC}{2}$.

5. Одредити колико има једнакокраких троуглова чије странице имају целобројне дужине (у cm), а обим им је једнак 2005 cm.

2008. Školsko takmičenje

VI РАЗРЕД

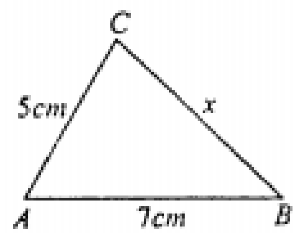
1. Израчунај вредност израза

$$2000x - 2001x + 2002x - 2003x + 2004x - 2005x + 2006x - 2007x$$

ако је x негативно решење једначине $|x| = 2008$.

2. У троуглу ABC угао $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. Симетрале углова α и β секу се под углом $124°$. Одреди угао $\sphericalangle ACB = \gamma$.

3. Ако су странице троугла 5, 7 и x (у cm), гледај слику и одреди природне бројеве x. За сваку вредност x упореди одговарајуће углове.



4. Нађи разломак са имениоцем 4 мањи од $-\frac{5}{23}$, а већи од $-\frac{6}{23}$.

5. Нацртај правоугаоник $ABCD$ ($AB = 3cm$, $BC = 5cm$). Одреди тачке M, N, P, Q које су редом средишта страница AB, BC, CD, DA. На изломљеној линији $MNQP$ конструиши тачке које су једнако удаљене од темена A и C.

VI РАЗРЕД

1. Ако је
$$x = (-5) - (-3) + 5 + (-5) \text{ и } y = -5 - x$$
израчунај колико је $|x - 1| - |y - 2|$.

2. Милован је требало да подели неки број са 9. Уместо да подели са 9 он је од тог броја одузео 9 и добио резултат -603. Који резултат би Милован добио да није погрешио?

3. У троуглу ABC угао $\angle BAC = 40°$, $\angle ABC = 20°$ и $AB - BC = 10cm$. Ако симетрала угла $\angle ACB$ сече праву AB у тачки M, одреди дужину CM.

4. За углове троугла ABC важи: $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = 2 \cdot \angle CAB$. Катета BC је $8cm$. Тачка M је средиште хипотенузе AB, тачка N је средиште катете AC и тачка P средиште дужи AM. Израчунај дужину изломљене линије $BCMNPA$.

5. За природне бројеве a, b и c важи да су већи од 1 и да је бар један од њих паран. Ако је $a + 1 = 2b + 2 = 3c + 3$, нађи најмању вредност производа $a \cdot b \cdot c$.

VI РАЗРЕД

1. Ако је $\frac{a}{b} = \frac{1}{20}$, израчунај вредност израза

$$\frac{a}{2b} + \frac{2a}{b} + 90a - 4,5b.$$

2. Одреди цифре a и b ($a \neq b$) тако да број $0,\overline{abab\ldots}$ буде једнак нескративом разломку за који је збир имениоца и бројиоца једнак 17.

3. Конструиши троугао ABC ако је познато $a + c = 8cm$, $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$.

4. Одреди све просте бројеве p, q и r такве да је

$$p \cdot (264q + 4r) = 2008.$$

5. Страница ромба $ABCD$ је $12cm$, а $\angle BAD = 60°$. Тачке P и Q су средишта страница BC и CD, редом. Праве AP и AQ секу дијагоналу BD у тачкама M и N. Израчунај дужину дужи MN.

VI РАЗРЕД

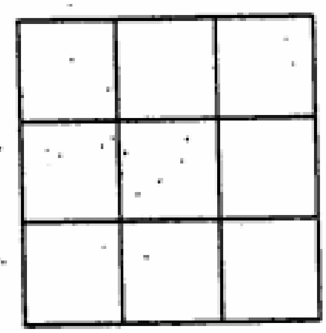
1. Одреди три рационална броја која су мања од $-\frac{5}{12}$ и већа од $-\frac{1}{2}$, а којима су именилац и бројилац узајамно прости бројеви.

2. У троуглу ABC ($AB>BC$) кроз тачке A и C конструисане су праве које су нормалне на симетралу угла ABC. Оне секу праве BC и AB, редом, у тачкама K и M. Израчунај дужину странице AB ако је $KC = 5\text{cm}$ и $MB = 8\text{cm}$.

3. Колико има природних бројева мањих од 2009 чији је производ цифара 42?

4. Дат је троугао чије су дужине страница цели бројеви (у центиметрима). Колики је најмањи, а колики највећи могући обим овог троугла ако је једна страница дужине 2009cm, а друга 2008cm?

5. Да ли се у квадрат 3×3 (види слику) могу уписати бројеви из скупа $\{-1, 0, 1\}$ тако да збирови бројева по колонама, врстама и дијагоналама буду различити (свака два)?



VI РАЗРЕД

1. Одреди све парове целих бројева x и y за које важи:

$$x^2 \cdot |y| = 2009.$$

2. Конструиши троугао ABC ако је позната страница BC (a), висина која одговара страници BC (h_a) и полупречник описане кружнице око троугла ABC (r_o).

3. На једном острву $\frac{3}{4}$ мушкараца су ожењени, а $\frac{2}{3}$ жена су удате. Који део становништва острва није у браку, ако је број ожењених мушкараца једнак броју удатих жена?

4. На страницама AB и BC ромба $ABCD$ изабране су тачке E и F тако да је $AE = BF$. Угао BAD тог ромба је 60°. Докажи да је троугао DEF једнакостраничан.

5. Дато је 5 природних бројева a, b, c, d и e, чији је збир 2009. Збир нека 3 од њих је 1000. Докажи да је $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ дељиво са 4.

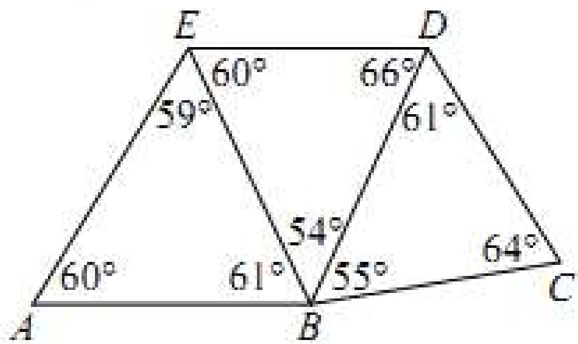
VI РАЗРЕД

1. Ако су a, b и c цели бројеви и ако је $a \cdot b = -6$, $a \cdot c = -10$ и $b \cdot c = 15$ израчунај $a \cdot b \cdot c$, a, b и c.

2. Над страницом AB квадрата $ABCD$ конструисан је једнакостранични троугао ABE при чему је тачка E у унутрашњости квадрата. Израчунај угао DEC.

3. Одреди $n \in \mathbb{N}$ тако да је $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ природан број.

4. Седам дужи формирају три троугла као на слици. Која од тих седам дужи је најдужа?



5. У једнакостраничном троуглу странице 4cm на случајан начин је распоређено 17 тачака. Докажи да постоје две тачке чије је растојање мање од 1cm.