Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Први разред – А категорија

1. Доказати да не постоје цели бројеви m и n такви да важи

$$(m+n+2)^2 = 3(mn+1).$$

2. a) Нека је уређена четворка (x, y, z, w) решење једначине

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = xyzw.$$

Доказати да је и $(yzw - x, y, z, w)$ такође решење исте те једначине.

b) Доказати да једначина

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = xyzw$$

има бесконачно много решења у скупу природних бројева.

3. У равни је нацртано неколико правих. Права a сече тачно три од осталих правих, а права b сече тачно четири од осталих правих. Права c сече тачно n од осталих правих, при чему је $n \neq 3$ и $n \neq 4$. Колико је правих нацртано у равни?

4. У конвексном шестоуглу $ABCDEF$ важи $AB \parallel FC \parallel DE$, $BC \parallel AD \parallel EF$ и $CD \parallel BE$. Доказати да важи и $BE \parallel FA$.

5. За округлим столом седи 2014 људи. Свако од њих или увек говори истину, или увек лаже. Свако од људи за столом рекао је следећу реченицу: „Не разматрајући мене и моје прве суседе с леве и десне стране, сви остали људи за овим столом увек лажу“. Колико има људи за столом који увек говоре истину?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Други разред – А категорија

1. Решити једначину
$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3.$$

2. Доказати да број чији се декадни запис састоји само од нула и двојки не може бити потпун квадрат.

3. На пречнику AB кружнице k налази се тачка C. Нека су P и Q тачке на кружници k са исте стране пречника AB такве да је $\measuredangle PCA = \measuredangle QCB$. Нека су O_1 и O_2 центри описаних кружница за $\triangle PCA$ и $\triangle QCB$, респективно. Доказати: $O_1O_2 \parallel AB$.

4. Нека су x, y и z реални бројеви. Ако су $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$ и $x^4 - y^4$ рационални бројеви различити од нуле, да ли тада и број $x - y$ мора бити рационалан?

5. У једном селу, n очајних домаћица истовремено су сазнале укупно n различитих трачева, при чему је свака сазнала тачно по један трач. Затим је уследио низ телефонских разговора, при чему у сваком разговору учествују тачно две домаћице, и оне том приликом међусобно размене све трачеве које су чуле до момента започињања разговора. Колико је минимално потребно телефонских разговора да би свака од n домаћица сазнала свих n трачева?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Функција $g : A \to A$ задата је на следећи начин:

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{за } x < n; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

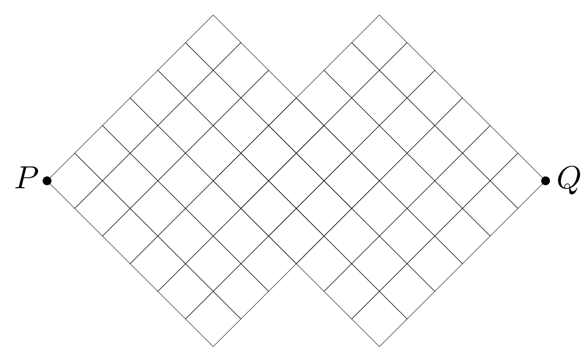
Колико има функција $f : A \to A$ таквих да за све $x \in A$ важи $f(f(x)) = g(x)$?

2. У оштроугли $\triangle ABC$ уписани су квадрати $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$ и $P_3Q_3R_3S_3$ на следећи начин: тачке P_1 и Q_1 леже на дужи BC, тачка R_1 на CA и тачка S_1 на AB; тачке P_2 и Q_2 леже на дужи CA, тачка R_2 на AB и тачка S_2 на BC; тачке P_3 и Q_3 леже на дужи AB, тачка R_3 на BC и тачка S_3 на CA. Нека је M_1 средиште дужи P_1Q_1, M_2 средиште дужи P_2Q_2 и M_3 средиште дужи P_3Q_3. Доказати да се праве AM_1, BM_2 и CM_3 секу у једној тачки.

3. Одредити највећи природан број који има особину да је дељив свим природним бројевима који нису већи од $\sqrt[3]{n}$.

4. Нека је дат троугао чије су дужине страница три узастопна природна броја и највећи угао је два пута већи од најмањег. Доказати да је такав троугао јединствен.

5. Колико има путева између тачака P и Q најкраће могуће дужине, при чему је дозвољено кретати се искључиво дуж страница квадратне мреже на цртежу?



Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Четврти разред – А категорија

1. Дат је природан број n. Нека су $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$ реални бројеви који задовољавају једнакости
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$
и
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1.$$
Одредити све могуће вредности броја x_1.

2. Наћи максималан производ природних бројева чији је збир једнак 2013.

3. У квадрат $ABCD$ уписана је кружница k. За сваку тачку T кружнице k, нека су α_T и β_T углови под којима се виде дијагонале AC и BD квадрата. Доказати да за свако $T \in k$ важи $\operatorname{tg}^2 \alpha_T + \operatorname{tg}^2 \beta_T = 8$.

4. Нека је a_0 произвољна цифра. За $n \in \mathbb{N}_0$, нека a_{n+1} представља цифру јединица броја $2^0 a_0 + 2^1 a_1 + \cdots + 2^n a_n$. Доказати да је низ $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ периодичан почев од неког члана.

5. Мерлин, помоћник краља Артура, установио је да постоји 2013 витезова округлог стола, и да притом сваки од њих има тачно два непријатеља међу осталим витезовима. Мерлин је даље утврдио да сви витезови могу сести за округли сто на такав начин да између свака два непријатеља седе тачно 182 друга витеза. Знајући да је могућ овакав распоред за округлим столом, одредити на колико начина може бити одабрана група витезова (групу чини бар 1 витез) у којој никоја два витеза нису у непријатељским односима.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

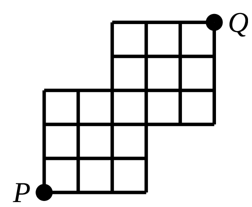
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Први разред – Б категорија

1. Одредити највећи природан број n такав да број $25! + 26!$ буде дељив бројем 3^n.

2. Колико има путева између тачака P и Q најкраће могуће дужине, при чему је дозвољено кретати се искључиво дуж страница квадратне мреже на цртежу?



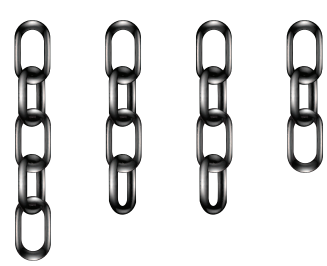
3. На острву живе само два типа људи: витезови (који увек говоре истину) и подлаци (који увек лажу). Туриста је срео два човека који живе на острву и питао вишег од њих да ли су они обојица витезови. Он му је одговорио, али на основу тог одговора туриста није могао да закључи ко су они. Зато је питао нижег да ли је виши витез. Након његовог одговора туриста је знао за сваког од њих двојице ком типу људи припада. Ком типу припадају људи које је туриста срео?

4. Испитати да ли је формула

$$(\neg r \Rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$$

таутологија.

5. Златар има четири мала ланчића као што је то илустровано на слици:



(Дакле, ланчићи су састављени од 5, 4, 4 и 3 алки.) Његови трошкови су 1 \$ да раскине било коју алку са ових ланчића и 2 \$ да састави опет исту алку. Колики су његови минимални трошкови у \$ ако жели да помоћу ових алки направи затворен ланчић?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Други разред – Б категорија

1. У правоуглом трапезу $ABCD$, с правим угловима у теменима A и D, дужине основица су $AB = a$ и $CD = b$, при чему је $a > b$. Познато је да кружница с пречником AD додирује крак BC. Израчунати површину трапеза $ABCD$ (одговор дати у зависности од вредности a и b).

2. Пера и Мика играју следећу игру. Они додељују вредности коефицијентима a, b и c у једначини
$$ax^2 + bx + c = 0.$$
Пера игра први и уписује произвољан реалан број уместо неког од коефицијената. Затим Мика уписује произвољне бројеве уместо преостала два коефицијента, уз услов да сва три уписана броја морају бити међусобно различита. Мика побеђује ако тако добијена једначина има тачно једно реално решење, а Пера побеђује у свим осталим случајевима. Ко од њих двојице има победничку стратегију?

3. Доказати да постоји природан број који почиње са 1234567890 који је дељив са 2013.

4. Нека су x, y и z реални бројеви такви да су xy, yz и zx рационални бројеви различити од нуле. Доказати:

a) број $x^2 + y^2 + z^2$ је рационалан;

b) ако је $x^3+y^3+z^3$ рационалан број различит од нуле, онда су x, y и z рационални бројеви.

5. Колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара 1, 2 и 3, али тако да се ниједна цифра не појављује више од два пута у запису броја?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Трећи разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}.$$

2. Поља табле формата $(2m+1) \times (2n+1)$ обојена су са 2 боје на произвољан начин. Поље те табле називамо *краљевским* ако међу свим пољима у његовој врсти има више оних која су обојена његовом бојом наспрам оних која су обојена супротном бојом. Поље те табле називамо *царским* ако међу свим пољима у његовој колони има више оних која су обојена његовом бојом наспрам оних која су обојена супротном бојом. Доказати да постоји бар $m+n+1$ поља која су истовремено краљевска и царска.

3. Одредити све двоцифрене бројеве дељиве производом својих цифара.

4. Дужа основица једнакокраког трапеза је a, а оштар угао α. Дијагонала трапеза нормална је на крак. Трапез ротира око дуже основице. Наћи запремину добијеног тела.

5. Дечак понедељком и уторком говори истину, суботом увек лаже, док осталим данима у недељи говори истину или лаже насумично. Седам узастопних дана понављано му је питање: „Како се зовеш?“ Првих шест дана давао је редом следеће одговоре: „Иван“, „Марко“, „Драган“, „Тома“, „Петар“, „Тома“. Који одговор је дао седмог дана?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. децембар 2014.

Четврти разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2.$$

2. Доказати да за сваки природан број $n>1$ важи неједнакост

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)!>((n+1)!)^n.$$

3. Одредити комплексне бројеве z_2 и z_3 тако да је $Oz_1z_2z_3$ ромб са оштрим углом код темена O (координатни почетак) једнаким 45°, при чему је $z_1=2\sqrt{2}+i$.

4. Доказати да за $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ важи

$$\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}.$$

5. Да ли међу свим шестоцифреним бројевима има више оних који се могу представити као производ нека два троцифрена броја, или више оних који се не могу тако представити?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.