Univerzitet u Novom Sadu, Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin", Zrenjanin

Prijemni Ispit iz Matematike Jun 2014

1. Rešiti jednačinu

$$|x| + |x+1| + |x+2| = 6.$$

2. Neka su a, b i c realni brojevi. Uprostiti izraz

$$\frac{(a+b+c)^2 - (a+b-c)^2}{(a-b+c)^2 - (a-b-c)^2}.$$

Odrediti uslove za a, b i c tako da dat izraz bude definsan.

3. Odrediti zbir kvadrata rešenja jednačine

$$2^{x^2-2x-10} = \frac{1}{4}.$$

4. Proveriti tačnost implikacije:

$$\text{Ako je} \quad (\log_3 x)(\log_x 2x)(\log_{2x} y) = \log_x x^2, \qquad \text{tada je} \quad y = 9.$$

5. Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$$

6. Neka je data funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Izračunati $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$ i $f^9(x) = f(f(...(f(x))...))$.

Napomena. Napisati i postupak rešavanja i rešenja zadataka.

Prijemni Ispit iz Matematike Jun 2014

1. Proveriti tačnost jednakosti

$$(32)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-11} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{1-\sqrt{5}}\right)^{-1} + (0,5 : 1,25)^{-1} = \frac{5}{2}.$$

2. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{3x+13} = 2\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}.$$

3. Proveriti tačnost jednakosti

$$4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}} = \frac{45}{11}$$

1. Razlikujemo četiri slučaja

$$\begin{aligned} x \le -2: &\quad -x - x - 1 - x - 2 = 6, \quad x = -3, \\ -2 \le x \le -1: &\quad -x - x - x + x + 2 = 6, \quad x = -5 \\ -1 \le x \le 0: &\quad -x + x + 1 + x + 2 = 6, \quad x = 3, \end{aligned}$$

$0 \le x: \quad x + x + 1 + x + 2 = 6, \quad x = 1.$

2. Formula za razliku kvadrata daje

$$\frac{(a+b+c-a-b+c)(a+b+c+a+b-c)}{(a-b+c-a+b+c)(a-b+c+a-b-c)} = \frac{2c \cdot 2(a+b)}{2c \cdot 2(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}.$$

3. Kako je $1/4 = 2^{-2}$, iz date jednačine izlazi

$$4x^2 - 2x - 10 = -2, \qquad x^2 - 2x - 8 = 0, \qquad (x-4)(x+2) = 0.$$

Rešenja su $x_1 = 4$ i $x_2 = -2$, tako da je $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

4. Logaritmi se mogu svesti na istu osnovu: ako je c bilo koji pozitivan broj tada

$$\frac{\log_c x}{\log_c 3} \frac{\log_c 2x}{\log_c x} \frac{\log_c y}{\log_c 2x} = 2 \log_x x.$$

Dalje je

$$\frac{\log_c y}{\log_c 3} = 2, \quad \log_x y = \log_x 9, \quad y = 9,$$

tako da je implikacija tačna.

5. $\sin^4 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$, $\sin^2 x(\sin^2 x - 1) = \cos^2 x(1 - \cos^2 x)$, $-\sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x \sin^2 x$, $\sin^2 x \cos^2 x = 0$. Tako je $\sin x = 0$ ili $\cos x = 0$. Rešenja su $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, i $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$, ili kraće $x = m\frac{\pi}{2}$ gde je $m \in \mathbf{Z}$.

6. Najpre se može uprostiti

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

Tako je

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{2x+1},$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{3x+1},$$

$$f^6(x) = f^3(f^3(x)) = f^3\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{3\cdot\frac{x}{3x+1}+1} = \frac{x}{6x+1},$$

$$f^9(x) = f^3(f^6(x)) = f^3\left(\frac{x}{6x+1}\right) = \frac{\frac{x}{6x+1}}{3\cdot\frac{x}{6x+1}+1} = \frac{x}{9x+1}.$$

....

1. Transformacije daju

$$2^{-10}\cdot 2^{11} + \left(\frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\right)^{-1} + (\frac{1}{2} : \frac{5}{4})^{-1} = 2 + \frac{1-5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

2. Kvadratni koreni su definisani ako i samo ako je $3x+13 \geq 0$ i $x-1 \geq 0$ i $x+3 \geq 0$, to jest $x \geq 1$. Kvadriranjem dobijamo

$$3z + 13 = 4(x+3) + 4\sqrt{(x+3)(x-1)} + x - 1,$$

odnosno $-x+1 = 2\sqrt{x^2+2x-3}$. Uz novi u slov $-x+1 \geq 0$, dalje se može računati, što nije neophodno, $x^2-2x+1 = 4(x^2+2x-3)$. Presek dva uslova daje uslov $x = 1$, što je i rešenje polazne jednačine.

3.

$$4^{\log_2 3+\log_4 \frac{5}{11}} = 4^{\log_2 3}\cdot 4^{+\log_4 \frac{5}{11}} = (2^2)^{\log_2 3}\cdot\frac{5}{11} = 2^{\log_2 3^2}\cdot\frac{5}{11} = 3^2\cdot\frac{5}{11} = \frac{45}{11}.$$