REŠENJA ZADATAKA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE
Saobraćaj, Građevina, Geodezija i geomatika, Čiste energetske tehnologije
09.07.2014.

1. **Dat je kompleksan broj** $z = Re\left(-1+i-\frac{15}{14}Im\left(\frac{1+3i}{i-2}\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

   (a) Pokazati da je $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

   (b) Izračunati $\sqrt{z}$.

   (a) $\frac{1+3i}{i-2}=\frac{1+3i}{-2+i}\cdot\frac{-2-i}{-2-i}=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i,\quad z=Re\left(-1+i-\frac{15}{14}\left(-\frac{7}{5}\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

   (b) $\sqrt{z}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\sqrt{1\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}}=\sqrt{1}e^{\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}},k=0,1$

   $z_1=e^{\frac{\pi}{6}i}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\wedge z_2=e^{\frac{7\pi}{6}i}=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$

2. **Data je funkcija** $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$.

   (a) Rešiti nejednačinu $f(x)\geq -1$;

   (b) Izračunati $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$.

   (a) $f(x)\geq-1\Leftrightarrow\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}+1\geq0\Leftrightarrow\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}\geq0\Leftrightarrow\frac{(x+3)(2x-1)}{(x-3)(x+3)}\geq0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x-3}\geq0\wedge x\neq-3$

	$(-\infty$,-3)	$(-3,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},3)$	(3,+∞)
$2x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2x-1}{x-3}$	$+$	$+$	$-$	$+$

   $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,\frac{1}{2}]\cup(3,+\infty).$

   (b) $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+2}{x-3}=\frac{1}{6}.$

3. **Rešiti jednačinu** $\frac{1}{2}\log_{10}(x-24)+\frac{1}{2\log_x 10}=1-\log_{10}2.$

   Jednačina je definisana za $x>0\wedge x-24>0\wedge x\neq1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log_{10}(x-24)+\frac{1}{2\log_x 10}=1-\log_{10}2 &\Leftrightarrow \log_{10}(x-24)+\log_{10}x=2(\log_{10}10-\log_{10}2)\\ &\Leftrightarrow \log_{10}(x-24)x=2\log_{10}5\\ &\Leftrightarrow x(x-24)=25\\ &\Leftrightarrow x^2-24x-25=0\Leftrightarrow x_1=25\wedge x_2=-1.\end{aligned}$$

   Zbog uslova $x>24$, rešenje date jednačine je $x=25$.

4. **Rešiti jednačinu** $4^{1+x}\cdot2^{1-4x}+3\cdot2^{1+x}\cdot4^{-x}-2=0.$

$$\begin{aligned}4^{1+x}\cdot2^{1-4x}+3\cdot2^{1+x}\cdot4^{-x}-2=0 &\Leftrightarrow 2^{2+2x}\cdot2^{1-4x}+3\cdot2^{1+x}\cdot2^{-2x}-2=0\\ &\Leftrightarrow 2\cdot2^{2-2x}+3\cdot2^{1-x}-2=0.\end{aligned}$$

   Uvodimo smenu $t=2^{1-x}>0$.
   Ovim svodimo problem na rešavanje kvadratne jednačine $2t^2+3t-2=0$ za $t>0$. Nule dobijene kvadratne jednačine su $t_1=-2$ i $t_2=\frac{1}{2}$. Kako je t pozitivno, dobijamo $x=2$.

5. **Rešiti jednačinu** $\sin x+\sin2x=0$.

   $\sin x+\sin2x=0\Leftrightarrow\sin x+2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow\sin x(1+2\cos x)=0\Leftrightarrow\sin x=0\vee\cos x=-\frac{1}{2}.$

   Odatle je skup rešenja date jednačine $\mathcal{R}=\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}.$

6. **Četiri pozitivna broja b_1, b_2, b_3, b_4 čine geometrijsku progresiju. Ako je b_2 veći od b_1 za 6, a b_4 od b_3 za 54, odrediti te brojeve.**

   $b_2 = b_1q, b_3 = b_1q^2, b_4 = b_1q^3$.
   $b_2 - b_1 = 6 \Leftrightarrow b_1q - b_1 = 6 \Leftrightarrow b_1(q-1) = 6$.
   $b_4 - b_3 = 54 \Leftrightarrow b_1q^3 - b_1q^2 = 54 \Leftrightarrow b_1q^2(q-1) = 54$.
   Na osnovu prethodnih jednakosti možemo zaključiti da je $6q^2 = 54 \Leftrightarrow q^2 = 9 \Leftrightarrow q_1 = 3 \wedge q_2 = -3$.
   Za $q_1 = 3$ je $b_1 = 3$, a za $q_2 = -3$ je $b_1 = -\frac{3}{2}$.
   Zbog uslova da su dati brojevi pozitivni, jedino rešenje je $b_1 = 3, b_2 = 9, b_3 = 27, b_4 = 81$.

7. **Neka su dati vektori $\vec{u} = \vec{m} - 3\vec{n}$ i $\vec{v} = 5\vec{m} - \vec{n}$.**

   (a) Ako je $\vec{m} = (1,1,1)$, $\vec{n} = (1,0,-1)$, naći $|\vec{m}|$, $|\vec{n}|$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ i $\vec{u}\times\vec{v}$;

   (b) Ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori i $\vec{u} \perp \vec{v}$, naći ugao između $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

   (a) $|\vec{m}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}, |\vec{n}| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.
   $\vec{u} = (1,1,1) - 3(1,0,-1) = (-2,1,4), \vec{v} = 5(1,1,1) - (1,0,-1) = (4,5,6)$.
   $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\cdot 4 + 1\cdot 5 + 4\cdot 6 = 21$.
   $$\vec{u}\times\vec{v} = \left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right| \begin{array}{cc} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{array} \begin{array}{l} \\ = 6\vec{i} + 16\vec{j} - 10\vec{k} - 4\vec{k} - 20\vec{i} + 12\vec{j} = -14\vec{i} + 28\vec{j} - 14\vec{k} \\ = (-14, 28, -14) = -14(1,-2,1). \end{array}$$
   (b) Ako su $\vec{u}$ i $\vec{v}$ ortogonalni, onda je njihov skalarni proizvod jednak nuli.
   $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{m} - 3\vec{n})(5\vec{m} - \vec{n}) = 5\vec{m}\vec{m} - \vec{m}\vec{n} - 15\vec{n}\vec{m} + 3\vec{n}\vec{n} = 5|\vec{m}|^2 - \vec{m}\vec{n} - 15\vec{m}\vec{n} + 3|\vec{n}|^2 = 5 - 16\vec{m}\vec{n} + 3$.
   $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 8 - 16\vec{m}\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{m}\vec{n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\vec{m}||\vec{n}|\cos\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

8. **Označimo sa a_1 i a_2 stranice, h_{a_1} i h_{a_2} odgovarajuće visine, P_1 i P_2 površine redom trouglova $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$. Neka je $\alpha_1 = 60°$ ugao koji odgovara temenu A_1, a $R_1 = 5$ poluprečnik opisane kružnice trougla $A_1B_1C_1$. Ako je $P_1 : P_2 = 3:1$ i $h_{a_1} : h_{a_2} = 3:2$, naći a_2.**

   Iz druge proporcije je $2h_{a_1} = 3h_{a_2} \Leftrightarrow h_{a_2} = \frac{2}{3}h_{a_1}$, pa iz prve proporcije imamo

   $P_1 = 3P_2 \Leftrightarrow \frac{a_1\cdot h_{a_1}}{2} = 3\frac{a_2\cdot h_{a_2}}{2} \Leftrightarrow a_1h_{a_1} = 3a_2\frac{2}{3}h_{a_1} \Leftrightarrow a_1 = 2a_2$.

   Na osnovu sinusne teoreme: $\frac{a_1}{\sin\alpha_1} = 2R_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{\sin 60°} = 2\cdot 5 \Leftrightarrow a_1 = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}, a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

9. **Ako je visina H pravilnog tetraedra jednaka 2, izračunati ivicu a, površinu P i zapreminu V tog tetraedra.**

   Strane pravilnog tetraedra su četiri jednakostranična trougla stranice a. Visina svakog od njih je $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Visina H pravilnog tetraedra pada pod pravim uglom na bazu i deli njenu visinu h u odnosu $2:1$. Posmatrajući pravougli trougao koji obrazuju visina H, visina h bočne strane i $\frac{1}{3}$ visine baze, dobijamo:
   $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + H^2 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{3a^2}{36} + 4 \Leftrightarrow 9a^2 = a^2 + 48 \Leftrightarrow a = \sqrt{6}$.

   $V = \frac{1}{3}B\cdot H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \sqrt{3}$.

   $P = 4B = 4\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$.

10. **Data je funkcija $f(x) = \sqrt{x} - 2 + x$.**

    (a) Odrediti nule funkcije $f(x)$;

    (b) Naći prvi izvod funkcije $f(x)$.

    (a)
    $$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} - 2 + x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 - x \wedge x \geq 0 \wedge 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x = 4 - 4x + x^2 \wedge x \in [0,2] \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \wedge x \in [0,2] \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm 3}{2} \wedge x \in [0,2] \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

    (b) $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' - (2)' + (x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 0 + 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$.