REŠENJA ZADATAKA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE
Mašinstvo, Grafičko inženjerstvo i dizajn,
Industrijsko inženjerstvo i inženjerski menadžment,
Inženjerstvo zaštite životne sredine i zaštite na radu
8. jul 2014.

1. **(a) Data je funkcija $f(x) = x^2 - 3$. Odrediti: nule funkcije, $f(-5)$ i $f(x + \sqrt{3})$.**
   (b) Odrediti sve realne vrednosti parametra k za koje jednačina $kx^2 - 4x + 5 - k = 0$ ima realna i različita rešenja.

   (a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \{\sqrt{\mathbf{3}}, -\sqrt{\mathbf{3}}\}$. $f(-5) = (-5)^2 - 3 = 25 - 3 = \mathbf{22}$.
   $f(x + \sqrt{3}) = (x + \sqrt{3})^2 - 3 = x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 - 3 = \mathbf{x^2 + 2x\sqrt{3}}$.

   (b) Za $k = 0$ jednačina je linearna, pa se taj slučaj isključuje.
   $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow D > 0 \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4k(5-k) > 0 \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow k^2 - 5k + 4 > 0 \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow$ $(k-1)(k-4) > 0 \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow k \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty) \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{k} \in (-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{4}, \infty)$.

	$(-\infty,1)$	$(1,4)$	$(4,+\infty)$
$k-1$	$-$	$+$	$+$
$k-4$	$-$	$-$	$+$
$(k-1)(k-4)$	$+$	$-$	$+$

2. **Rešiti nejednačinu**

$$\frac{x^2 + |x-1|}{x+2} \geq x.$$

Po definiciji, $|x-1| = x-1$ za $x \geq 1$, a $|x-1| = -(x-1)$ za $x < 1$.
Dakle, za $x \geq 1$, jednačina postaje
$\frac{x^2+x-1}{x+2} \geq x \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{x+2} - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1-x^2-2x}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1]$, što je u suprotnosti sa pretpostavljenim $x \geq 1$. Stoga, ovaj slučaj nema rešenja.
Za $x < 1$, jednačina postaje
$\frac{x^2-x+1}{x+2} \geq x \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x+2} - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1-x^2-2x}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-2, \frac{1}{3}]$, što zadovoljava uslov $x < 1$.
Rešenje zadatka je $\mathbf{x} \in (-\mathbf{2}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}]$.

3. **(a) Rešiti nejednačinu**

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1} > 25.$$

   (b) Rešiti jednačinu

$$\log_2 x + 2\log_x 2 = 3.$$

   (a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1} > 25 \Leftrightarrow (5^{-1})^{3x-1} > 5^2 \Leftrightarrow 5^{1-3x} > 5^2 \Leftrightarrow 1 - 3x > 2 \Leftrightarrow 3x < -1 \Leftrightarrow \mathbf{x} < -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

   (b) Jednačina $\log_2 x + 2\log_x 2 = 3$ je definisana za $x > 0$ i $x \neq 1$. $\log_2 x + 2\log_x 2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + 2\frac{1}{\log_2 x} = 3$, koja se smenom $t = \log_2 x$ svodi na $t^2 + 2 = 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1, 2\}$. Vraćanjem smene, dobija se rešenje $\mathbf{x} \in \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}$.

4. **Rešiti jednačinu** $\sin^5 x - \sin x \cos^4 x = 0$.

$\sin^5 x - \sin x \cos^4 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sin^4 x - \cos^4 x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin^4 x - \cos^4 x = 0$.
Kada je $\sin x = 0$, dobija se $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Kada je $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$, transformacijom leve strane dobija se $(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$ $\sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Rešenje zadatka je $\mathbf{x} \in \{\mathbf{k}\pi | \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{\mathbf{4}} + \mathbf{k}\frac{\pi}{\mathbf{2}} | \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}$.

5. **Dat je geometrijski niz čija su prva tri člana $2, -1, \frac{1}{2}$.**

   (a) Sabrati četvrti, peti i šesti član niza.

   (b) Zbir prvih n članova niza je $\frac{85}{64}$. Odrediti n.

   (a) Za zadati niz prvi član i količnik su $b_1 = 2$ i $q = -\frac{1}{2}$. Tada su četvrti, peti i šesti član niza redom $b_4 = b_1 q^3 = -\frac{1}{4}$, $b_5 = \frac{1}{8}$ i $b_6 = -\frac{1}{16}$. **Njihov zbir je $-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}$.**

   (b) $S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow \frac{85}{64} = 2 \cdot \frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})} \Leftrightarrow \frac{85}{64} = \frac{4}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^n) \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{85}{64} = 1 - (-\frac{1}{2})^n \Leftrightarrow \frac{255}{256} = 1 - (-\frac{1}{2})^n \Leftrightarrow$ $(-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{256} \Leftrightarrow \mathbf{n = 8}$.