FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
NOVI SAD

REŠENJA ZADATAKA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE ZA OBLASTI: ELEKTROTEHNIKA, RAČUNARSTVO, ANIMACIJA U INŽENJERSTVU, BIOMEDICINSKO INŽENJERSTVO I MEHATRONIKA

07.07.2014.

1. Neka je $z = 1-\sqrt{3}i$. Odrediti:

a) $|z|$ i $\arg z \in (-\pi,\pi]$; **b)** $\left(\dfrac{\overline{z}}{1+i}\right)^{2014}$,

gde je sa $|z|$ označen moduo kompleksnog broja z, konjugovano kompleksni broj broja z je označen sa $\overline{z}$, a $\arg z$ je argument kompleksnog broja z.

Rešenje: a) $|z| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3}$.

b) $\left(\dfrac{\overline{z}}{1+i}\right)^{2014} = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{2014} = \left(\dfrac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)^{2014} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^{2014} = 2^{1007}e^{(83\cdot 2\pi+\frac{11}{6}\pi)i} = 2^{1007}e^{-\frac{\pi}{6}i} = 2^{1006}(\sqrt{3}-i)$.

2. Data je kvadratna jednačina $x^2-ax+a=0$, $a\neq 0$. Ako su x_1 i x_2 koreni (rešenja) date kvadratne jednačine, odrediti vrednost realnog parametra a tako da važi $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}=4$.

Rešenje: Iz Vijetovih formula imamo da je $x_1+x_2=a$ i $x_1\cdot x_2=a$. Sa druge strane,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3} &= \frac{x_2^3+x_1^3}{x_1^3x_2^3} = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{(x_1x_2)^3} = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)}{(x_1x_2)^3}\\ &= \frac{(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)}{(x_1x_2)^3} = \frac{a(a^2-3a)}{a^3} = \frac{a-3}{a}.\end{aligned}$$

Dakle, iz uslova zadatka dobijamo da je $\dfrac{a-3}{a}=4$, tj. $4a=a-3$, odakle sledi da je $a=-1$.

3. Data je funkcija f sa $f(x)=\log_4\dfrac{4-3x}{2-x}$.

a) Odrediti oblast definisanosti funkcije f;

b) Rešiti nejednačinu $f(x)<-\dfrac{1}{2}$.

Rešenje: a) Funkcija je definisana ako je $\dfrac{4-3x}{2-x}>0\wedge 2-x\neq 0$, tj. za $x\in\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$.

b) $\log_4\dfrac{4-3x}{2-x}<-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{4-3x}{2-x}<4^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\dfrac{6-5x}{2-x}<0\Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{6}{5},2\right)$. Dakle, rešenje nejednačine je $x\in\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{4}{3}\right)$.

4. Rešiti jednačinu: **a)** $\dfrac{1}{2}5^x-\dfrac{3}{2}5^{\frac{x}{2}}=2$; **b)** $\log_2\log_3(2^{x^2+3x+2}+17)=2$.

Rešenje:

a) $\left(\dfrac{1}{2}5^x-\dfrac{3}{2}5^{\frac{x}{2}}=2\wedge 5^{\frac{x}{2}}=t\right)\Leftrightarrow\left(t^2-3t-4=0\wedge 5^{\frac{x}{2}}=t\right)\Leftrightarrow\left((t=4\vee t=-1)\wedge 5^{\frac{x}{2}}=t\right)\Leftrightarrow 5^{\frac{x}{2}}=4\Leftrightarrow x=\log_5 16$.

b) Jednačina je definisana za svako $x\in\mathbb{R}$ jer za svako $x\in\mathbb{R}$ važi da je $2^{x^2+3x+2}+17>0$ i $\log_3(2^{x^2+3x+2}+17)>0$.

$$\begin{aligned}\log_2\log_3(2^{x^2+3x+2}+17)=2 &\Leftrightarrow \log_2\log_3(2^{x^2+3x+2}+17)=\log_2 4\\ &\Leftrightarrow \log_3(2^{x^2+3x+2}+17)=4\\ &\Leftrightarrow 2^{x^2+3x+2}+17=3^4\\ &\Leftrightarrow 2^{x^2+3x+2}=2^6\\ &\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\\ &\Leftrightarrow x=1\vee x=-4.\end{aligned}$$

5. Data je jednačina $\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$.

a) Za koje $x \in \mathbb{R}$ je definisana data jednačina? **b)** Rešiti datu jednačinu.

Rešenje: a) Koristeći da je $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, dobija se jednačina $\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$. Data jednačina je definisana kada je $\sin x \neq 0$, tj. ako je $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Množeći polaznu jednačinu sa $\sin x$, dobija se jednačina $\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)\cos x = 1$. Uvođenjem smene $\cos x = t$, dobija se jednačina $2t^2+3t-2=0$, čija su rešenja $t_1=-2$ i $t_2=\frac{1}{2}$. Pošto $-2 \notin [-1,1]$, dobija se da je $\cos x = \frac{1}{2}$. Sledi da je skup rešenja date trigonometrijske jednačine $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. Date su tačke $A(1,2,-1)$, $B(4,5,-1)$ i $C(4,-1,8)$.

a) Odrediti ugao koji obrazuju vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$;

b) Odrediti težište trougla ABC;

c) Odrediti površinu trougla ABC.

Rešenje: a) Kako je $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (3,3,0)\cdot(3,-3,9) = 0$, ugao između vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ je $\frac{\pi}{2}$ (90°).

b) Prvi način: Neka je A_1 središte hipotenuze BC, a T težište trougla ABC. Tada je $A_1\left(\frac{4+4}{2}, \frac{5-1}{2}, \frac{-1+8}{2}\right)$, tj. $A_1\left(4,2,\frac{7}{2}\right)$. Koristeći činjenicu da težište deli težišnu duž u razmeri $2:1$, sledi da je $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Ako nepoznate koordinate težišta označimo sa x, y i z, dobija se $(x-1, y-2, z+1) = \frac{2}{3}\left(3,0,\frac{9}{2}\right) = (2,0,3)$. Sledi da je $x=3, y=2$ i $z=2$, tj. težište je $T(3,2,2)$.

Drugi način: Težište ΔABC je $T\left(\frac{1+4+4}{3}, \frac{2+5-1}{3}, \frac{-1-1+8}{3}\right)$, tj. $T(3,2,2)$.

c) Prvi način: Kako je $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 27\vec{i} - 27\vec{j} - 18\vec{k} = 9(3,-3,-2)$, površina ΔABC je

$$P = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{9}{2}\sqrt{3^2+(-3)^2+(-2)^2} = \frac{9\sqrt{22}}{2}.$$

Drugi način: Kako je ΔABC pravougli, njegova površina je

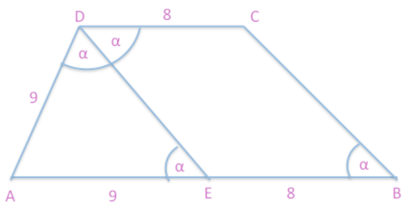
$$P = \frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{3^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+(-3)^2+9^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{11}}{2} = \frac{9\sqrt{22}}{2}.$$

7. Neka su AB i CD osnovice trapeza $ABCD$, pri čemu je kraća osnovica $\overline{CD}=8$, krak $\overline{AD}=9$ i neka je ugao $\measuredangle CDA$ dva puta veći od ugla $\measuredangle ABC$.

a) Izračunati dužinu osnovice AB trapeza $ABCD$;

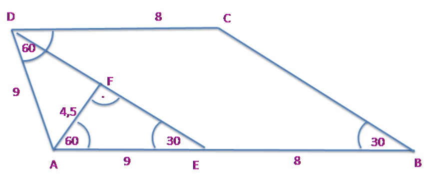
b) Ukoliko je u pomenutom trapezu $ABCD$ ugao $\measuredangle ABC = 30^\circ$, izračunati dužinu kraka BC.

Rešenje: a)



Označimo sa E presek simetrale ugla $\measuredangle CDA$ sa stranicom AB. Kako je $\measuredangle EDC = \measuredangle EDA = \measuredangle EBC$ i $EB \| DC$, to je četvorougao $EBCD$ paralelogram, pa je $\overline{EB} = \overline{DC} = 8$. Takođe je $\measuredangle AED = \measuredangle ABC$ (uglovi sa paralelnim kracima), pa je trougao AED jednakokraki sa osnovicom ED, tj. $\overline{AE} = \overline{AD} = 9$. Sledi da je $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = 9+8 = 17$.

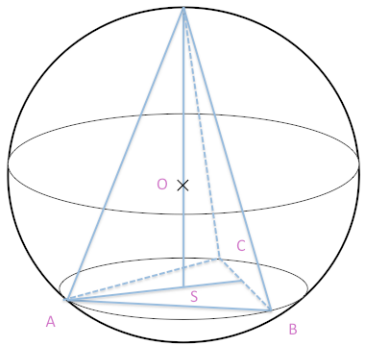
b)



Imajući u vidu rezultate dobijene u delu zadatka pod a), iz trougla AEF, gde je sa F označeno podnožje visine iz temena A trougla AED, uočavanjem da je duž EF visina jednakostraničnog trougla stranice 9, možemo dobiti dužinu duži EF kao $\overline{EF} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. Sledi da je $\overline{BC} = \overline{ED} = 2\overline{EF} = 9\sqrt{3}$.

8. U loptu poluprečnika $R=1$ sa centrom O upisana je prava piramida čija je osnova jednakostranični trougao ABC, a visina H. Izraziti zapreminu V piramide kao funkciju njene visine H.

Rešenje:



Označimo sa a stranicu osnove piramide, a sa S podnožje njene visine. Kako je $\overline{AS}=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ i $\overline{AS}^2=\overline{AO}^2-\overline{OS}^2=R^2-(H-R)^2=H(2R-H)=H(2-H)$, to je $a^2=(\sqrt{3}\,\overline{AS})^2=3H(2-H)$. Sada je zapremina piramide $V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H=\frac{\sqrt{3}}{4}H^2(2-H)$, gde je B površina jednakostraničnog trougla u osnovi piramide.

9. Data je funkcija $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$.

a) Odrediti oblast definisanosti funkcije f;

b) Ispitati monotonost funkcije f i odrediti njene ekstremne vrednosti;

c) Odrediti jednačinu tangente i normale funkcije f u tački $A(7,y_0)$;

d) Izračunati $\int\limits_6^8 f(x)dx$.

Rešenje: a) Oblast definisanosti je $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

b) $f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x-5)-(x^2-5x+4)}{(x-5)^2}=\dfrac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}=\dfrac{(x-3)(x-7)}{(x-5)^2}$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,3)\cup(7,\infty)$, pa $f\nearrow$ za $x\in(-\infty,3)\cup(7,\infty)$, dok je $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(3,5)\cup(5,7)$, pa $f\searrow$ za $x\in(3,5)\cup(5,7)$. Za $x=3$ funkcija f ima lokalni maksimum 1, a za $x=7$ funkcija ima lokalni minimum 9.

c) $f'(7)=0$, $y_0=f(7)=9$. Jednačina tražene tangente je $y=9$, a jednačina tražene normale je $x=7$.

d) $\displaystyle\int_6^8\frac{x^2-5x+4}{x-5}dx=\int_6^8\frac{x(x-5)+4}{x-5}dx=\int_6^8 xdx+\int_6^8\frac{4}{x-5}dx=\left(\frac{x^2}{2}+4\ln(x-5)\right)\Big|_6^8=14+4\ln 3.$

10. Na koliko različitih načina se mogu rasporediti 3 kuglice u 2 kutije tako da je svaka kuglica u nekoj kutiji i neke kutije mogu biti i prazne, ako se:

a) kuglice razlikuju i kutije razlikuju;

b) kuglice ne razlikuju i kutije razlikuju;

c) kuglice razlikuju i kutije ne razlikuju;

d) kuglice ne razlikuju i kutije ne razlikuju?

Rešenje: a) U pitanju su varijacije sa ponavljanjem treće klase od dva elementa, $\overline{V}_3^2=2^3=8$, tj. sve funkcije

$$\binom{1\,2\,3}{1\,1\,1},\ \binom{1\,2\,3}{1\,1\,2},\ \binom{1\,2\,3}{1\,2\,1},\ \binom{1\,2\,3}{1\,2\,2},\ \binom{1\,2\,3}{2\,1\,1},\ \binom{1\,2\,3}{2\,1\,2},\ \binom{1\,2\,3}{2\,2\,1},\ \binom{1\,2\,3}{2\,2\,2}.$$

b) Na četiri načina. U pitanju su permutacije sa ponavljanjem 000|, 00|0, 0|00, |000 ili kombinacije sa ponavljanjem, tj. neopadajuće funkcije $\binom{1\,2\,3}{1\,1\,1}$, $\binom{1\,2\,3}{1\,1\,2}$, $\binom{1\,2\,3}{1\,2\,2}$, $\binom{1\,2\,3}{2\,2\,2}$.

c) Na četiri načina. U pitanju su sledeće particije skupa $\{1,2,3\}$:

$$\Big\{\{1,2,3\},\{\}\Big\},\ \Big\{\{1,2\},\{3\}\Big\},\ \Big\{\{1,3\},\{2\}\Big\},\ \Big\{\{2,3\},\{1\}\Big\}.$$

d) Na dva načina: $\underline{\left|\,0\,0\,0\,\right|}\ \underline{\left|\qquad\right|}$, $\underline{\left|\,0\,0\,\right|}\ \underline{\left|\,0\,\right|}$.

Svaki zadatak vredi maksimum 6 bodova. **KATEDRA ZA MATEMATIKU**