Zadaci

Klasifikacioni ispit juna 1992.

1) Odrediti skup vrednosti parametra *a*, tako da postoji rešenje jednačine

$$\left[\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right]^{-2}\cdot\left[1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}\right]^{\frac{1}{2}}=1.$$

2) Rešiti nejednačinu

$$\log_{\frac{1}{4}}\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}.$$

3) (a) Odrediti geometrijsko mesto minimuma funkcija

$$f(x)=x^2+(p-2)x+p-3,\quad p\in R.$$

(b) Za koje vrednosti parametra *p* je suma kvadrata rešenja jednačine *f(x)* najmanja ?

4) Ako su α i β oštri uglovi trougla, dokazati da je trougao tupougli ako i samo ako je $\tan\alpha\cdot\tan\beta<1$.

5) Dva naspramna temena pravougaonika su $A(5,0)$ i $C(2,4)$. Odrediti koordinate ostala dva temena ako se jedno od njih nalazi na pravoj x-$3y = 0$.

6) U pravouglom trouglu *ABC* sa pravim uglom kod temena *C*, *CD* i *CE* su visina i težišna linija iz temena *C*. Odrediti odnos kateta, ako je $CD:CE = 40:41$.

Klasifikacioni ispit septembra 1992.

7) Uprostiti izraz

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}}\right)^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{\left(a^{\frac{2}{m}}-a^{\frac{2}{n}}\right)\left(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}}\right)},\ a>0, a\neq 1.$$

8) Ako je $a>0$, rešiti jednačinu

$$2\log_x a+\log_{ax}a+3\log_{a^2x}a=0.$$

9) Odrediti vrednosti realnog parametra *m* tako da jednačina $x^2+2mx-(m-2)=0$ ima realna rešenja x_1 i x_2 koja zadovoljavaju uslov $x_1^2+x_2^2+x_1+x_2>0$.

10) Ako su α, β i γ uglovi proizvoljnog trougla, dokazati da tada važi jednakost

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

11) Ortocentar trougla je u koordinatnom početku, a jednačine pravih koje određuju dve stranice trougla su $x + 3y - 1 = 0$ i $3x + 5y - 6 = 0$. Odrediti jednačinu prave kojoj pripada treća stranica trougla.

12) Ako su *A'*,*B'*,*C'* redom sredine stranica *BC*, *CA*, *AB* trougla *ABC* i *D* podnožje visine iz temena *A*, dokazati da je $\angle DC'A' = \angle B - \angle C = \angle DB'A'$, uz uslov $AC > AB$.

Klasifikacioni ispit juna 1993.

13) Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

14) Ako je $f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$, izračunati $f(6)+f(16)$.

15) Za uglove oštrouglog trougla važi relacija $\sin\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$. Dokazati da je trougao jednakokraki.

16) Za koji ugao treba da rotira prava (p) $x-7y+59=0$ oko svoje tačke $M(-3,y)$, da bi postala tangenta kružnice $(K): x^2+y^2+4x-2y-20=0$?

17) Oko valjka opisan je jednakokraki trapez površine 50cm² sa oštrim uglom 30º. Izračunati površinu i zapreminu valjka ako je dužina njegove visine jednaka dužini kraka trapeza.

18) Ako su x_1 i x_2 koreni jednačine $3x^2-(m+3)x+m=0$ $(m\in R,\ m\neq 0)$:

a) Formirati kvadratnu jednačinu $ay^2+by+c=0$ po y, čija su rešenja $y_1=1-\frac{2}{x_1}$ i $y_2=1-\frac{2}{x_2}$;

b) U dobijenoj jednačini odrediti parametar m tako da jedno njeno rešenje bude dva puta veće od drugog;

c) Za tako nađeno m odrediti odgovarajuće vrednosti x_1 i x_2.

Klasifikacioni ispit jula 1994.

19) Uprostiti izraz

$$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}\,.$$

20) Za koje je vrednosti parametra a sistem nejednačina

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

zadovoljen za sve vrednosti realne promenljive x ?

21) Rešiti nejednačinu

$$\sin x+\sin 3x<\sin 2x+\sin 4x\,.$$

22) Date su tačke $A(2,1)$, $B(4,2)$ i $C(-2,2)$. Odrediti tačku u ravni koju određuju ove tri tačke iz koje se duži AB i AC vide pod istim uglom.

23) Trougao ΔABC upisan je u krug. Iz temena A konstruisana je tangenta kruga do preseka sa produženom stranicom BC u tački D, a iz temena B i C su konstruisane normale na tu tangentu. Dužina kraće od te dve normale je 6cm. Ako je $BC = 5\text{cm}$ i $AD = 5\sqrt{6}\text{cm}$, odrediti površinu trapeza koji obrazuju te normale, stranica BC i deo tangente.

24) Rešiti jednačinu
$$\log_3 8^{x-1} \cdot \log_2 27 = x + 7 .$$

Prijemni ispit juna 1995.

25) Rešiti jednačinu ($\log x \equiv \log_{10} x$) :
$$|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3 .$$

26) Za koje vrednosti realnog parametra a jednačina
$$ax^2 + x + a - 1 = 0$$
ima realne i različite korene x_1 i x_2 koji zadovoljavaju nejednakost
$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1 \ ?$$

27) Rešiti jednačinu
$$\left| \operatorname{ctg}\left(2\text{x} - \frac{\pi}{2} \right) \right| = \frac{1}{\cos^2 2x} - 1 .$$

28) Dokazati da je broj $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ deljiv sa 133 za svaki nenegativan ceo broj n.

29) Izračinati zbir
$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} .$$

30) Visina i težišna linija konstruisane iz temena C trougla ΔABC, dele ugao trougla kod temena C na tri jednaka dela. Odrediti uglove trougla ΔABC.

Prijemni ispit avgusta 1995.

31) U skupu R rešiti nejednačinu
$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}} \right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}} \right)^x > 8 .$$

32) Skicirati grafik funkcije
$$y = 2^{\frac{x^2 - |x|}{x}} .$$

Za koje vrednosti x je funkcija monotono rastuća ?

33) Rešiti jednačinu

$$5\cdot 25^{x-1}-5^{x}=100$$

34) Izračunati $\log_{30}8$, u zavisnosti od a i b, ako je $a=\log_{10}5$ i $b=\log_{10}3$.

35) Dokazati da među svim trouglovima ΔABC sa istom osnovicom AB i istom dužinom visine h_c koja odgovara ivici AB, najmanji obim ima jednakokraki trougao.

36) Rešiti jednačinu

$$\sin x-\cos x-|\sin x+\cos x|=1.$$

Prijemni ispit jula 1996.

37) Dokazati da za svako $n\in N$

$$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

38) Rešiti jednačinu

$$\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\frac{4}{3}\sin 2x.$$

39) Rešiti jednačinu

$$x^{\log_2\frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7}=1.$$

40) Odrediti parametar m tako da rešenja kvadratne jednačine

$$x^2-(m-2)x+m+1=0$$

zadovoljavaju uslov $\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|<2$.

41) Odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz tačke $A(-4,5)$ i $B(2,1)$, kao i površinu trougla između te prave i koordinatnih osa.

42) Ugao između izvodnice i ose prave kupe je α, a zbir dužina izvodnice i poluprečnika je m. Izračunati površinu te kupe u zavisnosti od α i m.

Prijemni ispit septembra 1996.

43) Dokazati da za svako $n\in N$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

44) Rešiti jednačinu

$$\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1.$$

45) Rešiti jednačinu

$$x^{\log_{1996}x}=3^{\log_{1996}x^2+\log_{1996}27}.$$

46) Naći jednačinu kružnice koja prolazi kroz tačke $M(10,9)$ i $N(4,3)$, a centar joj je na pravoj $2x - 3y + 19 = 0$.

47) Odrediti dvocifren broj ako je njegov proizvod sa cifrom jedinica jednak 175, a proizvod sa cifrom desetica jednak 105.

48) Visina pravilne trostrane zarubljene piramide je 17cm, a poluprečnici kružnica opisanih oko osnova su 5cm i 12cm. Izračunati njenu zapreminu.

Prijemni ispit jula 1997.

49) Dokazati da za svako $n \in N$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\dots\cdot\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}\ ,\ \frac{x}{2^n} \neq k\pi (k \in Z)\,.$$

50) Rešiti sistem jednačina

$$5\left|\log_2 x\right| - \log_3 y^2 = 0$$
$$\log_2 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} y = 9.$$

51) Rešiti nejednačinu

$$x(3x^2 + 5x - 6)^{\frac{1}{2}} < x^2 + 2x\,.$$

52) Odrediti jednačinu kruga koji prolazi kroz tačku $M(4,3)$, dodiruje y-osu i spolja dodiruje krug $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

53) Za koje vrednosti x brojevi $\log 2$, $\log(2^x - 1)$ i $\log(2^x + 3)$ predstavljaju u datom poretku tri uzastopna člana aritmetičkog niza ?

54) Dijagonale četvorougla $ABCD$ seku se u tački P, tako da je zbir površina trougla ΔABP i trougla ΔCDP jednak zbiru površina trougla ΔBCP i trougla ΔADP. Dokazati da je ili $AP = PC$ ili $BP = PD$, tj. da presečna tačka P polovi bar jednu dijagonalu četvorougla $ABCD$.

Prijemni ispit jula 1998.

55) U jednačini

$$x^2 - x + m - 1 = 0$$

odrediti realan broj m tako da njena rešenja x_1 i x_2 zadovoljavaju uslov

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 \geq -1.$$

56) Rešiti jednačinu

$$\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \tfrac{1}{2}.$$

57) Ako je $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ i $\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pri čemu su α i β oštri uglovi, dokazati da je $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

58) Dijagonale trapeza dele srednju liniju na delove tako da je jedan deo jednak zbiru druga dva dela. Kako se odnose osnovice trapeza ?

59) Iz tačke $A(-5,7)$ konstruisane su tangente na krug

$$x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$$

Tangente dodiruju krug u tačkama B i C. Odrediti :

a) Površinu trougla ΔABC.

b) Jednačinu kruga opisanog oko ΔABC.

60) Dve strane trostrane piramide su jednakostranični trouglovi stranice a, koji određuju prav diedar. Izračunati površinu i zapreminu piramide.

Prijemni ispit jula 1999.

61) Dokazati da je $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

62) Romb $ABCD$ stranice a rotira najpre oko stranice AB, a zatim oko dijagonale AC i obrazuje dva tela čije su zapremine V_1 i V_2. Izračunati oštar ugao romba ako je odnos zapremina ovih tela $V_1 : V_2 = 9\sqrt{3}$.

63) Rešiti sistem jednačina

$$4|\log_2 x| - 3\log_3 y = 2$$
$$2\log_2 x + \log_3 y = 6.$$

64) Dužine stranica trougla obrazuju aritmetičku progresiju, a njegova površina iznosi $\frac{3}{5}$ površine jednakostraničnog trougla istog obima. Naći odnos stranica datog trougla.

65) Odrediti vrednosti realnog parametra k tako da jednačina

$$(k-5)x^2 - 4kx + (k-2) = 0$$

ima realna rešenja različitog znaka ?

66) Rešiti jednačinu

$$3\sin x = 2(1 - \cos x).$$

Prijemni ispit septembra 2000.

67) Rešiti nejednačinu

$$\log_2(x+1)+\log_{x+1}2 \geq \frac{5}{2}.$$

68) Rešiti jednačinu

$$\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x=\cos^4\frac{\pi}{3}$$

69) Odrediti parametre p i q u jednačini $x^2+px+q=0$ tako da dodavanjem broja 1 svakom od njenih korena dobijamo korene jednačine $x^2-p^2x+pq=0$.

70) U kvadrat je upisan pravougaonik sa stranicama paralelnim dijagonalama kvadrata. Dokazati da površina pravougaonika ne može biti veća od polovine površine kvadrata.

71) Ako se omotač kupe sa izvodnicom dužine x razvije, dobija se polukrug. Koliki je ugao pri vrhu kupe? Naći površinu i zapreminu kupe u funkciji od x.

72) Stranice paralelograma pripadaju pravama $y=3x-16$ i $x-3y+16=0$, a centar mu je u tački (4,4). Naći jednačine preostale dve stranice i ispitati da li je ovaj paralelogram romb.

Prijemni ispit septembra 2000. (drugi rok)

73) Uprostiti izraz

$$\frac{4}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}(a^2\sqrt{b})^{-1/2}\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-1},\ a,b>0, a\neq b.$$

74) Za koje vrednosti realnog parametra m rešenja jednačine

$$x^2+(2m+2)x+m=0$$

zadovoljavaju relaciju $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>8$?

75) Rešiti jednačinu

$$\sin 3x\sin 5x=\sin 4x\sin 6x$$

76) Rešiti jednačinu

$$2\log_x 3+\log_{3x}3+3\log_{9x}3=0$$

77) Romb čija je veća dijagonala dužine 6cm i oštar ugao $\alpha = 60^\circ$, rotira oko prave koja prolazi kroz teme oštrog ugla i normalna je na stranicu romba. Izračunati površinu i zapreminu dobijenog tela.

78) Odrediti jednačinu kružnice koja prolazi kroz tačku $A(-5,7)$, a dodiruje $x-$ osu u tački $B(-4,0)$.

Prijemni ispit juna 2001.

79) Matematičkom indukcijom pokazati da važi

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots n)^2 .$$

80) Data je jednačina

$$x^2-(m+3)x+m+2=0 .$$

Odrediti sve vrednosti parametra *m* za koje je tačna konjunkcija

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{1}{2} \text{ i } x_1^2+x_2^2<5 .$$

gde su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.

81) Rešiti jednačinu

$$\sqrt{\log(-x)}=\log\sqrt{x^2} .$$

82) Rešiti nejednačinu

$$\sin^4 x+\cos^4 x<\frac{3}{4} .$$

83) U kupu je upisana lopta poluprečnika *R*. Dodirni poluprečnik lopte obrazuje sa visinom kupe ugao α. Naći površinu i zapreminu kupe u funkciji od *R* i α.

84) Odrediti jednačinu tangente kruga $x^2+y^2=5$ koja sa pravom $x+2y-7=0$ gradi ugao od 45º.

Rešenja zadataka

Klasifikacioni ispit juna 1992.

1. Da bi funkcije u zadatku bile definisane, mora da važi $a>0$, $x>0$ i $ax\neq 1$. Transformacijom izraza na desnoj strani jednačine dobija se

$$\left[\frac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right]^{-2}\cdot\left[1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{\sqrt[4]{ax}\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{a^2}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right]^{-2}\cdot\left[\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[-\sqrt[4]{ax}+\frac{1}{\sqrt[4]{ax}}+\sqrt[4]{ax}\right]^{-2}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$$

$$=\left((ax)^{-\frac{1}{4}}\right)^{-2}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)=\sqrt{ax}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)=\sqrt{ax}+a$$

pa jednačina dobija oblik

$$\sqrt{ax}+a=1, a>0, x>0.$$

Odavde sledi da je

$$x=\left(\frac{1-a}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{(1-a)^2}{a} \quad \text{za sve } a>0 \text{ i } a\neq 1.$$

Traženi skup vrednosti parametra a je $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

2. Pre svega, mora da važi $x \neq -3$ i $\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\neq 0$, tj. $x \neq -1$. Oslobađanjem od logaritma i apsolutne vrednosti (uz navedene uslove) dobija se

$$\log_{\frac{1}{4}}\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\right|<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow -1<\frac{2x+1}{x+3}<0.$$

Iz $\frac{2x+1}{x+3}<0$ sledi $x\in(-3,-\frac{1}{2})$, a iz $\frac{2x+1}{x+3}>-1$ sledi $x\in(-\infty,-3)\cup(-\frac{4}{3},+\infty)$. Konačno, imajući u vidu uslov $x \neq -1$, dobijamo $x\in(-\frac{4}{3},-1)\cup(-1,-\frac{1}{2})$.

3. a) Funkcija $f(x)$ dostiže svoj maksimum u tački $x=-\frac{p-2}{2}=-\frac{p}{2}+1$. U toj tački njena vrednost je

$$f\left(-\frac{p}{2}+1\right)=\left(-\frac{p}{2}+1\right)^2+(p-2)\left(-\frac{p}{2}+1\right)+p-3$$
$$=-\frac{p^2}{4}+2p-4.$$

Geometrijsko mesto minimuma ove funkcije je $\left\{\left(-\frac{p}{2}+1,-\frac{p^2}{4}+2p-4\right):p\in R\right\}$.

Odavde se dobija (uvodeći smenu $x=-\frac{p}{2}+1$) da je geometrijsko mesto minimuma funkcije $f(x)$ je $y=-(x+1)^2$.

b) Po Vijetovim formulama za rešenja x_1 i x_2 jednačine $f(x)=0$ važi $x_1+x_2=-p+2$ i $x_1x_2=p-3$. Iz ovoga sledi

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-p+2)^2-2(p-3)=p^2-6p+10.$$

Ova kvadratna funkcija dostiže minimum za $p=-\frac{-6}{2}=3$ i u tom slučaju je suma kvadrata rešenja jednaka 1.

4. Neka je γ treći ugao trougla. Trougao je tupougli ako i samo ako je $\gamma>\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\tan\gamma<0$.

Kako je $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, imamo

$$0>\tan\gamma=\tan(\pi-(\alpha+\beta))=-\tan(\alpha+\beta)=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

Kako je $\tan\alpha+\tan\beta>0$ to važi $1-\tan\alpha\tan\beta>0$, tj. $\tan\alpha\tan\beta<1$, što je i trebalo dokazati.

5. Sva temena pravougaonika nalaze se na kružnici K sa centrom u središtu $O\left(\frac{7}{2},2\right)$ dijagonale AC i prečnikom 5 (dužina duži AC). Koordinate (x,y) temena koje se nalazi na pravoj $x-3y=0$ zadovoljavaju sledeći sistem jednačina

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$$
$$x-3y=0.$$

Zamenom $x=3y$ u prvoj jednačini dobijamo kvadratnu jednačinu

$$\left(3y-\frac{7}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$$

tj.

$$10y^2-25y+10=0.$$

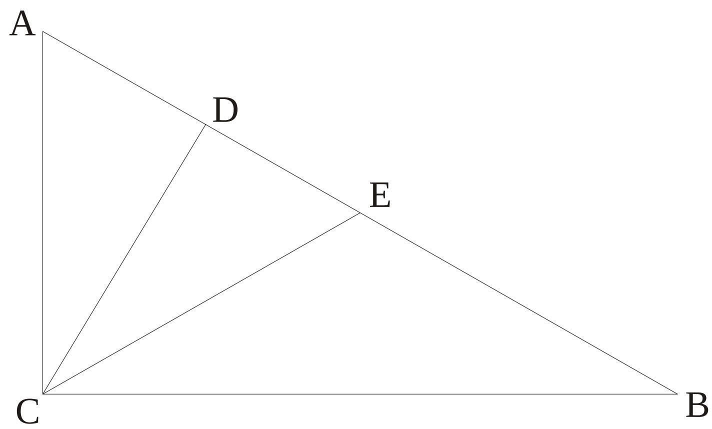
Rešenja ove jednačine su $y=\frac{1}{2}$ i $y=2$, a na osnovu toga lako dobijamo koordinate preostala dva temena pravougaonika, s obzirom na to da je četvrto teme pravougaonika simetrično temenu sa dobijenim koordinatama u odnosu na centar kružnice O. Za

$y=\frac{1}{2}$ preostala dva temena pravougaonika imaju koordinate $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ i $\left(\frac{11}{2},\frac{7}{2}\right)$, a za y = 2 imaju koordinate (6,2) i (1,2).

6. Neka je CD = 40t, a CE = 41t. Trougao ΔCDE je pravougli, pa je, po Pitagorinoj teoremi, stranica $DE=\sqrt{(41t)^2-(40t)^2}=9t$. Kako je E središte hipotenuze AB, to je $AE=BE=CE=41t$ i tada je AD = 32t i BD = 50t. Trouglovi ΔACD i ΔBCD su pravougli, pa važi

$$AC=\sqrt{(40t)^2+(32t)^2}=8t\sqrt{41}$$
$$BC=\sqrt{(40t)^2+(50t)^2}=10t\sqrt{41}.$$

Odnos kateta je $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4}{5}$.



Klasifikacioni ispit septembra 1992.

7. Transformacijom izraza dobijamo

$$\frac{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{(a^{\frac{2}{m}}-a^{\frac{2}{n}})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}=\frac{(a^{\frac{2}{m}}-2a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}})+4a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})(a^{\frac{1}{m}}+a^{\frac{1}{n}})(a^{1+\frac{1}{m}}+a^{1+\frac{1}{n}})}=$$
$$=\frac{a^{\frac{2}{m}}+2a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}}}{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})a(a^{\frac{1}{m}}+a^{\frac{1}{n}})^2}=\frac{(a^{\frac{1}{m}}+a^{\frac{1}{n}})^2}{(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}})a(a^{\frac{1}{m}}+a^{\frac{1}{n}})^2}=\frac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$$

8. Da bi logaritamske funkcije u zadatku bile definisane, mora da važi $x>0$, $x\neq 1$, $ax\neq 1$ i $a^2x\neq 1$. Korišćenjem jednakosti $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ dobijamo

$$0 = 2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 2\frac{\log a}{\log x} + \frac{\log a}{\log(ax)} + 3\frac{\log a}{\log(a^2x)}$$

$$= \log a\left(\frac{2}{\log x} + \frac{1}{\log a + \log x} + \frac{3}{2\log a + \log x}\right).$$

Ako je $a = 1$, onda je rešenje jednačne svako $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. U suprotnom je

$$\frac{2}{\log x} + \frac{1}{\log a + \log x} + \frac{3}{2\log a + \log x} = 0.$$

Odavde dobijamo

$$2(\log a + \log x)(2\log a + \log x) + \log x(2\log a + \log x) + 3\log x(\log a + \log x) = 0,$$

odnosno

$$6\log^2 x + 11\log a \log x + 4\log^2 a = 0.$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine po log x dobijamo $\log x = -\frac{4}{3}\log a$ ili $\log x = -\frac{1}{2}\log a$, odnosno $x = a^{-\frac{4}{3}}$ ili $x = a^{-\frac{1}{2}}$.

9. Da bi jednačina imala realna rešenja, njena diskriminanta mora da bude veća ili jednaka nuli. Diskriminanta jednačine je $D = 4m^2 + 4(m-2) = 4(m^2 + m - 2)$. Iz uslova $D \geq 0$ zaključulemo da mora da važi $m \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$.

   Koristeći Vijetove formule dobijamo $x_1 + x_2 = -2m$ i $x_1x_2 = -(m-2)$. Odavde sledi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_1 + x_2 = 4m^2 + 2(m-2) - 2m = 4m^2 - 4.$$

   Odavde je $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 > 0$ akko je $m^2 - 1 > 0$, akko je $m \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Konačno, dobijamo $m \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$.

10. Kako je $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, to je $\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta)$. Odatle sledi

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 \\
&\quad - 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \\
&\quad - 2\cos^2 a\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = 1.
\end{aligned}$$

11. Dve date prave određuju jedno od temena trougla (nalazi se u njihovom preseku). Koordinate tog temena dobijamo rešavanjem sistema jednačina

$$x+3y-1=0$$
$$3x+5y-6=0.$$

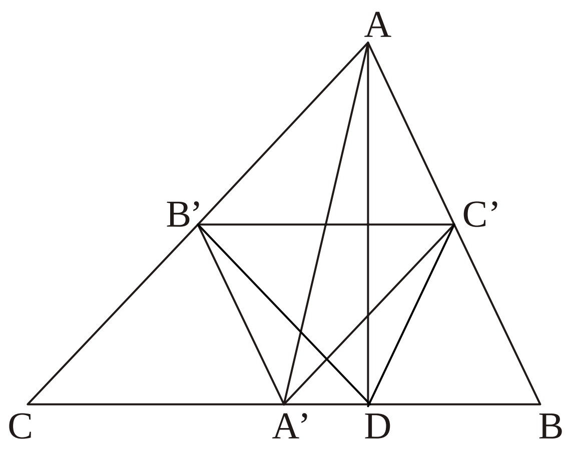
Rešenje ovog sistema je $(x,y) = (10,-3)$. Sada odredimo jednačine normala iz ortocentra (u ovom slučaju je to koordinatni početak) na svaku od ove dve prave. Presek svake od ovih normala sa pravom na koju nisu normalne nam određuje po jedno teme trougla. Koeficijenti pravaca ovih normala su $k = 3$ (za pravu $x+3y-1=0$) i $k=\frac{5}{3}$ (za pravu $3x+5y-6=0$). Kako obe normale prolaze kroz koordinatni početak, njihove jednačine su $y=3x$, odnosno $y=\frac{5}{3}x$. Preseci ovih normala sa pravim $3x+5y-6=0$ i $x+3y-1=0$, redom, su tačke sa koordinatama $\left(\frac{1}{3},1\right)$ i $\left(\frac{1}{6},\frac{5}{18}\right)$. Jednačina prave kroz ove dve tačke je $y=39x-12$.

12. Trougao ΔABD je pravougli, a C' je središte njegove hipotenuze, pa je $BC' = DC'$. Iz toga sledi da je $\angle BDC' = \angle DBC' = \angle ABC$. Uglovi $\angle DC'B'$ i $\angle BDC'$ su uglovi sa paralelnim kracima, pa su jednaki, tj $\angle DC'B' = \angle ABC$. Uglovi $\angle BCA$ i $\angle B'C'A'$ imaju paralelne krake, pa su jednaki. Znači

$$\angle DC'A' = \angle DC'B' - \angle B'C'A' = \angle B - \angle C.$$

Potpuno analogno se dokazuje da je $\angle C'A'B' = \angle CAB$ i $\angle C'B'D = \angle BCA$, na osnovu čega je

$$\angle DB'A' = \angle C'B'A' - \angle C'B'D = \angle B - \angle C.$$



Klasifikacioni ispit juna 1993.

13. Da bi logaritamska i stepena funkcija u zadatku bile definisane, mora da važi $x>1$. Tada važi

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}+1\right|=\log_{\frac{1}{2}}(x-1).$$

Važi $(\forall x\geq 1)\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}+1\right|\geq 0$ i $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geq 0\Leftrightarrow x\in(1,2]$. Iz ovoga zaključujemo da jednačina može da ima rešenja samo ako je $x\in(1,2)$ ($x = 2$ očigledno nije rešenje). U tom slučaju je

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}+1\right|=-(\sqrt{x-1}-1)+(\sqrt{x-1}+1)=2.$$

Iz ovoga sledi $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=2$, tj. $x=\frac{5}{4}$.

14. Koristeći Muavrovu formulu dobijamo

$$f(n)=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n$$

$$=\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)=2\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Sada je $f(6)+f(16)=2\cos\frac{3\pi}{2}+2\cos 4\pi=2$.

15. Primenjujući $\sin 2x=2\sin x\cos x$ dobijamo

$$\sin\alpha=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta.$$

Kako je $0<\alpha<\pi$, dobijamo $\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\beta$, a kako su α i β oštri uglovi sledi $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\beta$. Odavde zaključujemo da je $\alpha+2\beta=\pi$, tj. trougao je jednakokraki.

16. Koordinate tačke *M* zadovoljavaju jednačinu prave *p*, pa dobijamo da su je *M*(-3,8). Jednačina kruga se može zapisati u obliku

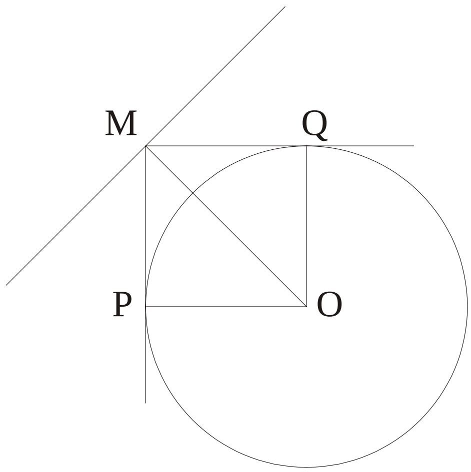
$$(x+2)^2+(y-1)^2=25,$$

tj. centar kruga je *O*(-2,1), a poluprečnik mu je 5. Rastojanje tačke *M* od centra kruga *O* je $5\sqrt{2}$. Neka su *P* i *Q* tačke u kojima tangente iz *M* dodiruju dati krug. Trouglovi ΔOMP i ΔOMQ su pravougli, pa je

$$MP=\sqrt{OM^2-OP^2}=5$$

$$MQ=\sqrt{OM^2-OQ^2}=5.$$

Iz ovoga i činjenice da su uglovi $\angle MPO$ i $\angle MQO$ pravi, zaključujemo da je četvorougao $MPOQ$ kvadrat.
Koeficijent pravca prave OM je -7, a koeficijent pravca prave p je $\frac{1}{7}$. Iz toga zaključujemo da su ove dve prave uzajamno normalne.
Iz svega ovoga zaljučujemo da pravu p treba rotirati za 45° u proizvoljnom smeru da bi postala jedna od tangenti datog kruga.



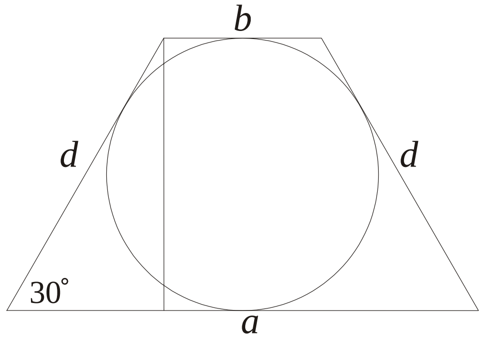
17. Pošto je trapez tetivan, zbir dužina njegovih osnovica jednak je zbiru dužina njegovih krakova, tj. $a + b = 2d$. S druge strane, oštri ugao trapeza je jednak 30°, pa je trougao koji obrazuju krak d, visina trapeza h i deo donje osnovice a jednak polovini jednakostraničnog trougla. Odatle sledi da $h = \frac{d}{2}$. Poluprečnik osnove valjka je jednak polovini visine, tj. $r = \frac{h}{2}$. Površina trapeza je

$$50 = \frac{a+b}{2}h = d \cdot \frac{d}{2}$$

odakle je $d = 10$. Kako je visina valjka $H = d$, lako se dobija da su površina i zapremina valjka redom jednake

$$P = 2\pi r(r + H) = \frac{125\pi}{2},$$

$$V = \pi r^2 H = \frac{125\pi}{2}.$$



18. Korišćenjem Vijetovih formula dobijamo $x_1 + x_2 = \frac{m+3}{3}$ i $x_1 x_2 = \frac{m}{3}$.

a) U kvadratnoj jednačini $ax^2 + bx + c = 0$ sa rešenjima y_1 i y_2 važi $y_1 + y_2 = -\frac{b}{a}$ i $y_1 y_2 = \frac{c}{a}$. Dalje je

$$-\frac{b}{a} = y_1 + y_2 = \left(1 - \frac{2}{x_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{x_2}\right) = 2 - 2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)$$

$$= 2 - 2\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2 - 2\frac{\frac{m+3}{3}}{\frac{m}{3}} = 2 - 2\frac{m+3}{m} = -\frac{6}{m}$$

$$\frac{c}{a} = y_1 y_2 = \left(1 - \frac{2}{x_1}\right)\left(1 - \frac{2}{x_2}\right) = 1 - 2\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + \frac{4}{x_1 x_2}$$

$$= 1 - 2\frac{m+3}{m} + \frac{12}{m} = -1 + \frac{6}{m} = \frac{6-m}{m}.$$

Tražena jednačina je $my^2 + 6y + (6-m) = 0$.

b) Ako je $y_1 = 2y_2$, tada je $y_1 = -\frac{4}{m}$ i $y_2 = -\frac{2}{m}$, pa je

$$\frac{6-m}{m} = y_1 y_2 = \left(-\frac{4}{m}\right)\left(-\frac{2}{m}\right) = \frac{8}{m^2}$$

odnosno

$$(6-m)m = 8 \Leftrightarrow (m-2)(m-4) = 0.$$

Prema tome, jedno rešenje je dva puta veće od drugog akko je $m = 2$ ili $m = 4$.

c) Ako je $m = 2$, polazna jednačina glasi $3x^2 - 5x + 2 = 0$ i ima rešenja 1 i $\frac{2}{3}$, a ako je $m = 4$, jednačina postaje $3x^2 - 7x + 4 = 0$, sa rešenjima 1 i $\frac{4}{3}$.

Klasifikacioni ispit jula 1994.

19. Transformacijom izraza dobijamo

$$\frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{ax^2} - \sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x} = \frac{\frac{a+x}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})} + \frac{\sqrt[3]{ax}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})^2}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x} =$$

$$\frac{\frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})} + \frac{\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x} = \frac{\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{ax}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x} =$$

$$\frac{\frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{a}.$$

20. $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ za svako realno x, pa važi

$$\begin{aligned} -3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2 & \quad \Leftrightarrow \\ -3(x^2 - x + 1) < x^2 + ax - 2 < 2(x^2 - x + 1) & \quad \Leftrightarrow \\ 0 < 4x^2 + (a-3)x + 1 \wedge 0 < x^2 - (a+2)x + 4 & \end{aligned}$$

Poslednji sistem nejednačina će biti zadovoljen za svako realno x ako i samo ako su diskriminante kvadratnih jednačina $4x^2 + (a-3)x + 1 = 0$ i $x^2 - (a+2)x + 4 = 0$ manje od 0. Diskriminanta prve jednačine $D = (a-3)^2 - 16$ je manja od 0 za $a \in (-1,7)$, dok je diskriminanta druge jednačine $D = (a+2)^2 - 16$ manja od 0 za $a \in (-6,2)$. Iz ovoga zaključujemo da je dati sistem nejednačina zadovoljen za svako realno x akko je $a \in (-1,2)$.

21. Koristeći adicione formule dobijamo :

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x && \Leftrightarrow \\ & 2\sin 2x \cos x < 2\sin 3x \cos x && \Leftrightarrow \\ & 0 < 2(\sin 3x - \sin 2x)\cos x && \Leftrightarrow \\ & 0 < 4\cos x \cos \tfrac{5x}{2} \sin \tfrac{x}{2} && \Leftrightarrow \\ & 0 < \cos x \cos \tfrac{5x}{2} \sin \tfrac{x}{2} && \end{aligned}$$

Nejednačina će, dakle, biti zadovoljena akko je paran broj činilaca u poslednjem izrazu manji od 0.

Primetimo da je

$$0 < \cos x \Leftrightarrow x - 2k\pi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \text{ za neko } k \in Z$$

$$0 < \cos \frac{5x}{2} \Leftrightarrow x - \frac{4}{5} l\pi \in \left(0, \frac{\pi}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi\right), \text{za neko } k \in Z$$

$$0 < \sin \frac{x}{2} \Leftrightarrow x - 4m\pi \in (0, 2\pi), \text{ za neko } m \in Z.$$

Zajednički period svih ovih uslova je 4π, pa dobijene ekvivalencije možemo pisati u obliku

$$0 < \cos x \Leftrightarrow x - 4k\pi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right), \text{za neko } k \in Z$$

$$\begin{aligned} 0 < \cos \frac{5x}{2} \Leftrightarrow x - 4k\pi \in & \left(0, \frac{\pi}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}\pi, \pi\right) \cup \left(\frac{7}{5}\pi, \frac{9}{5}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{5}\pi, \frac{13}{5}\pi\right) \\ & \cup \left(3\pi, \frac{17}{5}\pi\right) \cup \left(\frac{19}{5}\pi, 4\pi\right), \text{za neko } k \in Z \end{aligned}$$

$$0 < \sin \frac{x}{2} \Leftrightarrow x - 4k\pi \in (0, 2\pi), \text{ za neko } k \in Z$$

Polazna nejednakost je ispunjena akko je ispunjen jedan od sledećih uslova :

a) $0<\cos x,\ 0<\cos\frac{5x}{2},\ 0<\sin\frac{x}{2} \Rightarrow x-4k\pi \in \left(0,\frac{\pi}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,\frac{7}{5}\pi\right)$ za neko $k\in Z$;

b) $0<\cos x,\ 0>\cos\frac{5x}{2},\ 0>\sin\frac{x}{2} \Rightarrow x-4k\pi \in \left(2\pi,\frac{11}{5}\pi\right)\cup\left(\frac{7}{2}\pi,\frac{19}{5}\pi\right)$ za neko $k\in Z$;

c) $0>\cos x,\ 0<\cos\frac{5x}{2},\ 0>\sin\frac{x}{2} \Rightarrow x-4k\pi \in \left(\frac{5}{2}\pi,\frac{13}{5}\pi\right)\cup\left(3\pi,\frac{17}{5}\pi\right)$ za neko $k\in Z$;

d) $0>\cos x,\ 0>\cos\frac{5x}{2},\ 0<\sin\frac{x}{2} \Rightarrow x-4k\pi \in \left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{5}\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{7}{5}\pi\right)$ za neko $k\in Z$.

Konačno, x je rešenje date nejednačine akko

$$x-4k\pi\in\left(0,\frac{\pi}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{5}\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{7}{5}\pi\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,\frac{7}{5}\pi\right)$$
$$\cup\left(2\pi,\frac{11}{5}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{2}\pi,\frac{13}{5}\pi\right)\cup\left(3\pi,\frac{17}{5}\pi\right)\cup\left(\frac{7}{2}\pi,\frac{19}{5}\pi\right), \text{ za neko } k\in Z$$

odnosno, akko

$$x-2n\pi\in\left(0,\frac{\pi}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{5}\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{7}{5}\pi\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,\frac{7}{5}\pi\right), \text{ za neko } n\in Z.$$

22. Neka je D tačka iz koje se duži AB i AC vide pod pravim uglom. Tada je $\angle BDC = \angle BDA + \angle ADC = 180°$. Iz toga sledi da tačka D pripada pravoj BC. Jednačina prave BC je $y = 2$. Tačka D je podnožje normale iz tačke A na pravu BC, pa pošto ova normala ima jednačinu $x = 2$, zaključujemo da tačka D ima koordinate (2,2).

23. Neka su E i F, redom, podnožja normala iz tačaka A i B na tangentu AD. Iz potencije tačke D u odnosu na krug dobijamo da je

$$BD\cdot CD = AD^2.$$

Kako je $CD = BD + BC = BD + 5$, to iz gornje jednakosti dobijamo kvadratnu jednačinu

$$BD\cdot(BD+5)=150$$

koja ima pozitivno rešenje $BD = 10$. Trouglovi ΔBED i ΔCFD su slični, pa je

$$\frac{CF}{15}=\frac{CF}{CD}=\frac{BE}{BD}=\frac{6}{10}$$

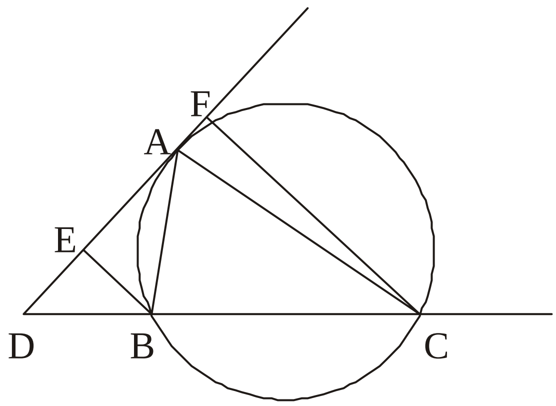
odakle je $CF = 9$.

Ostaje još da odredimo dužinu duži EF, koja je ujedno i visina trapeza $BEFC$. Trouglovi ΔBED i ΔCFD su pravougli, pa važi

$$ED=\sqrt{BD^2-BE^2}=8$$
$$FD=\sqrt{CD^2-CF^2}=12.$$

Sada je $EF = 4$ i površina trapeza $BEFC$ je

$$P_{BEFC}=\frac{BE+CF}{2}EF=30.$$



24. Koristeći da je $\log_b a \cdot \log_a b = 1$, dobijamo

$$\begin{aligned} \log_3 8^{x-1} \cdot \log_2 27 = x + 7 &\Leftrightarrow \\ 3(x-1)\log_3 2 \cdot 3\log_2 3 = x + 7 &\Leftrightarrow \\ 9(x-1) = x + 7 &\Leftrightarrow \\ x = 2. & \end{aligned}$$

Prijemni ispit 1995.

25. Da bi logaritamska i eksponencijalna funkcija u zadatku bila definisane, mora da važi $x > 0$ i $x \neq 1$. Takođe, $x = 2$ je očigledno rešenje date jednačine. Inače

$$|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3 \Leftrightarrow \log^2 x - 2\log x = 3.$$

Ovo je kvadratna jednačina po log x, a njena rešenja su log x = 3 i log x = –1. Prema tome, rešenja date jednačine su $x_1 = 2$, $x_2 = 1000$ i $x_3 = \frac{1}{10}$.

26. Očigledno je a ≠ 1, jer je, inače, jedno od rešenja date jednačine $x = 0$. Diskriminanta ove kvadratne jednačine je $D = 1 - 4a(a-1)$. Da bi jednačina imala realna i različita rešenja, mora da važi $D > 0$, a odatle sledi

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Koristeći Vijetove formule dobijamo da je $x_1 x_2 = \dfrac{a-1}{a}$, a iz toga što je $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{D}}{2a}$ zaključujemo da je $|x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$.

Sada je

$$1<\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\Leftrightarrow 1<\left|\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right|\Leftrightarrow 1<\left|\frac{\frac{\sqrt{D}}{|a|}}{\frac{a-1}{a}}\right|\Leftrightarrow 1<\frac{\sqrt{D}}{|a-1|},$$

tj. rešenja zadovoljavaju datu nejednačinu akko je

$$1<\frac{\sqrt{1+4a-4a^2}}{|a-1|},$$

odnosno akko je

$$|a-1|<\sqrt{1+4a-4a^2}\,.$$

Odavde je

$$(a-1)^2<1+4a-4a^2 \Leftrightarrow 5a^2-6a<0 \Leftrightarrow 5a(a-\tfrac{6}{5})<0 \Leftrightarrow a\in(0,\tfrac{6}{5})\,.$$

Na kraju dobijamo $a\in\left(0,\frac{6}{5}\right)\cap\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\setminus\{1\}$, a kako je $\frac{6}{5}<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, dobijamo da rešenja polazne kvadratne jednačine zadovoljavaju datu nejednakost akko

$$a\in(0,1)\cup(1,\tfrac{6}{5}).$$

27. Kako je $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}2x$ i $\frac{1}{\cos^2 2x}-1=\operatorname{tg}^2 2x$, jednačina dobija oblik

$$|\text{- tg } 2\text{x}|=\operatorname{tg}^2 2x.$$

Iz ovoga dobijamo da važi

$$\operatorname{tg}2x=0 \quad\vee\quad \operatorname{tg}2x=1 \quad\vee\quad \operatorname{tg}2x=-1 \quad\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)\ \vee\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)\ \vee\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z).$$

28. Korišćenjem binomne formule dobijamo

$$11^{n+2}+12^{2n+1}=121\cdot 11^n+12\cdot 12^{2n}=$$

$$=121\cdot 11^n+12\cdot(133+11)^n=121\cdot 11^n+12\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}133^{n-k}\cdot 11^k=$$

$$=12\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}133^{n-k}\cdot 11^k+(121+12)\cdot 11^n=133\left(12\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}133^{n-k-1}\cdot 11^k+11^n\right),$$

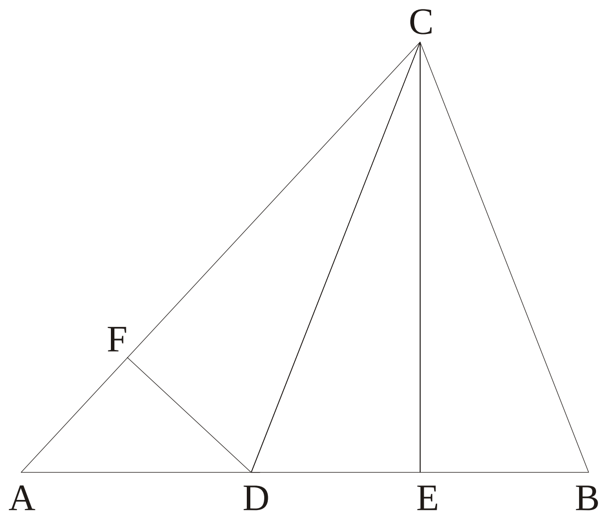
tj. dati izraz je deljiv sa 133 za svaki nenegativan ceo broj *n*.

29. Iz

$$
\begin{aligned}
3S_n &= 1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}} \\
&= 1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right) \\
&= 1+\left(S_n-\frac{n}{3^n}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}} \\
&= S_n-\frac{n}{3^n}+\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = S_n+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^n}
\end{aligned}
$$

zaključujemo da je $S_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\left(n+\frac{3}{2}\right)$.

30. Neka je D središte stranice AB trougla ΔABC, a E podnožje visine iz temena C. Neka je još F podnožje visine iz temena D trougla ΔADC. Po uslovima zadatka važi da je $\angle BCE = \angle DCE = \angle DCF$. Iz toga što su uglovi $\angle BEC$, $\angle DEC$ i $\angle DFC$ pravi, kao i iz činjenica da trouglovi ΔBEC i ΔDEC, odnosno ΔDEC i ΔDFC imaju po jednu zajedničku stranicu, sledi $\Delta BEC \cong \Delta DEC \cong \Delta DFC$. Iz ove podudarnosti sledi da je $BE = DE = DF$. Kako je D središte stranice AB, zaključujemo da važi $AD = 2DF$. Kako je ugao $\angle DFA$ prav, zaključujemo da je $\angle BAC = 30°$, a $\angle ADF = 60°$. Dalje, iz jednakosti uglova $\angle EDC$ i $\angle FDC$ zaključujemo da je $\angle EDC = \angle FDC = 60°$. Iz $\angle ABC = \angle EDC$ sledi $\angle ABC = 60°$, a $\angle ACB = 90°$.



Prijemni ispit avgusta 1995.

31. Kako je $\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=1$, to se za $a=\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x$ nejednačina svodi na $a+\frac{1}{a}>8$, odnosno $a^2-8a+1>0$. Ova kvadratna nejednačina je zadovoljena ako i

samo ako je $a < 4 - \sqrt{15} = \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{-2}$ ili $a > 4 + \sqrt{15} = \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{2}$. Prema tome, skup rešenja polazne jednačine je $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

32. Primetimo da funkcija nije definisana za $x = 0$. Za $x > 0$, je $y = 2^{\frac{x^2-x}{x}} = 2^{x-1}$, a za $x < 0$ je $y = 2^{\frac{x^2+x}{x}} = 2^{x+1}$.

33. Uvođenjem smene $a = 5^x$, data jednačina dobija oblik $a^2 - 5a - 500 = 0$. Rešenja ove kvadratne jednačine su $a = 25$ i $a = -20$. Kako je $(\forall x \in R) 5^x > 0$, dobijamo da je jedino rešenje polazne jednačine $x = 2$.

34. Kako je

$$\log_{30} 8 = \frac{\log 8}{\log 30} = \frac{3\log 2}{\log 2 + \log 3 + \log 5}$$

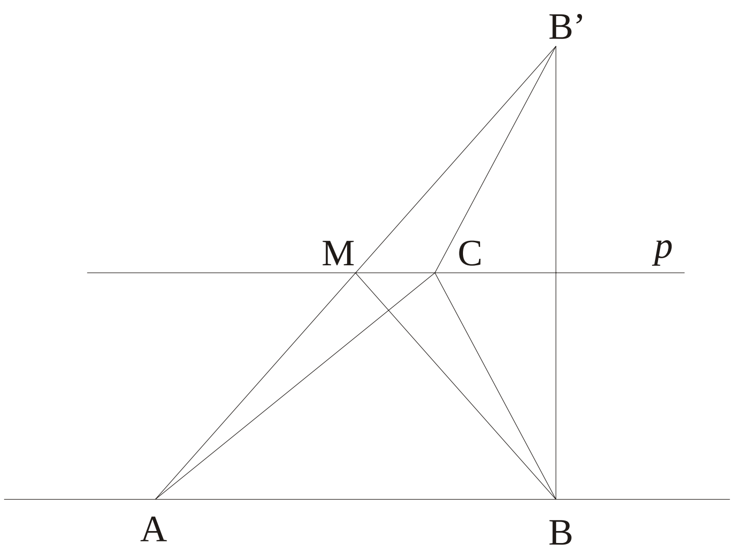
i kako su nam poznate vrednosti log 3 i log 5, treba jedino naći vrednost log 2 na osnovu njih. Ovu vrednost dobijamo iz $1 = \log 10 = \log 2 + \log 5$, tj. dobijamo da je $\log 2 = 1 - a$. Konačno je

$$\log_{30} 8 = \frac{3(1-a)}{1+b}.$$

35. Očigledno, teme C trougla ΔABC pripada pravoj p paralelnoj osnovici AB i na rastojanju h_c od nje. Neka je B' tačka simetrična sa B u odnosu na pravu p. Tada je $BC = B'C$. Iz $\Delta AB'C$ se vidi da je

$$AC + BC = AC + B'C \geq AB' = AM + MB' = AM + MB.$$

Iz ovoga jasno sledi da trougao ΔABC ima najmanji obim kada je $C \equiv M$, odnosno kada je ΔABC jednakokraki.



36. Ako je $\sin x + \cos x \geq 0$, onda jednačina dobija oblik

$$1 = \sin x - \cos x - (\sin x + \cos x) = -2\cos x .$$

Odavde je $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3} (k \in Z) \Leftrightarrow \sin x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$. Iz uslova $\sin x + \cos x \geq 0$ sledi da je $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in Z)$.

Ako je $\sin x + \cos x < 0$, onda jednačina dobija oblik

$$1 = \sin x - \cos x + (\sin x + \cos x) = 2\sin x.$$

Odavde je $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} (k \in Z) \Leftrightarrow \cos x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$. Iz uslova $\sin x + \cos x < 0$ sledi da je $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in Z)$.

Prijemni ispit jula 1996.

37. Označimo zbir na levoj strani jednakosti sa S_n. Dokaz tvrđenja izvodima indukcijom po n. Za $n = 1$, tvrđenje je očigledno tačno.

Pretpostavimo da jednakost važi za $n \in N$, tj. $S_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$. Treba dokazati da je $S_{n+1} = (-1)^n \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$S_{n+1} = S_n + (-1)^n (n+1)^2 \overset{i.h.}{=} (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n (n+1)^2 =$$

$$= (-1)^n \left((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Prema tome, tvrđenje važi za svako $n \in N$.

38. Očigledno je $\sin x \neq 0$ i $\cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x &= \frac{4}{3}\sin 2x && \Leftrightarrow \\
\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{4}{3}\sin 2x && \Leftrightarrow \\
\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} &= \frac{4}{3}\sin 2x && \Leftrightarrow \\
2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} &= \frac{4}{3}\sin 2x && \Leftrightarrow \\
3\cos 2x &= 2\sin^2 2x && \Leftrightarrow \\
3\cos 2x &= 2(1 - \cos^2 2x)
\end{aligned}$$

Poslednja jednačina je kvadratna jedančina po $\cos 2x$. Njeno jedino rešenje je $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Iz ovoga se dalje dobija

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow (2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z) \quad \vee \quad (2x = \frac{4\pi}{3} + 2l\pi, l \in Z)$$
$$\Leftrightarrow (x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z) \quad \vee \quad (x = \frac{2\pi}{3} + l\pi, l \in Z)$$

39. Da bi logaritamska i eksponencijalna funkcija u zadatku bile definisane, neophodno je da bude zadovoljen uslov $x > 0$.

Ako obe strane jednačine logaritmujemo za osnovu 2, dobijamo

$$\log_2 x \log_2 \frac{x}{98} + \log_2 7 \log_2 14 = 0$$
$$\log_2 x(\log_2 x - \log_2 98) + \log_2 7 \log_2 14 = 0$$
$$(\log_2 x)^2 - \log_2 98 \log_2 x + \log_2 7 \log_2 14 = 0$$

Poslednju jednačinu podelimo sa $(\log_2 7)^2$ i iskoristimo pravilo $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$. Dobijamo

$$(\log_7 x)^2 - \log_7 98 \log_7 x + \log_7 14 = 0.$$

Ovo je kvadratna jednačina po $\log_7 x$. Njena diskriminanta je

$$D = (\log_7 98)^2 - 4\log_7 14.$$

Ako iskoristimo jednakosti $\log_7 98 = 2 + \log_7 2$ i $\log_7 14 = 1 + \log_7 2$, dobijamo da je $D = (\log_7 2)^2$. Prema tome, rešenja dobijene kvadratne jednačine su $\log_7 x = 1$ i $\log_7 x = \log_7 2 + 1$, odakle sledi da su rešenja polazne jednačine $x = 7$ i $x = 14$.

40. Oba rešenja moraju da budu različita od 0, odakle sledi $m \neq -1$. Primenom Vijetovih pravila, dobijamo

$$x_1 + x_2 = m - 2 \, , \; x_1 x_2 = m + 1.$$

Dalje je

$$\left|\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right| < 2 \Leftrightarrow \left|\frac{m-2}{m+1}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{m-2}{m+1} < 2.$$

Iz $-2 < \frac{m-2}{m+1}$ dobijamo $m \in D_1 = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$. Iz $\frac{m-2}{m+1} < 2$ dobijamo $m \in D_2 = (-\infty,-4) \cup (-1,+\infty)$. Konačno, $m \in D_1 \cap D_2 = (-\infty,-4) \cup (0,+\infty)$.

41. Jednačina prave kroz dve date tačke ima oblik

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

gde su (x_1, y_1) i (x_2, y_2) koordinate datih tačaka.

Zamenom koordinata tačaka A i B u jednačini, dobijamo jednačinu prave

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Tačke preseka te prave sa koordinatnim osama su $S\left(0,\frac{7}{3}\right)$ i $T\left(\frac{7}{2},0\right)$. Treba naći površinu trougla ΔOST.

$$OS=\frac{7}{3}, OT=\frac{7}{2}\Rightarrow P_{\Delta OST}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{49}{12}.$$

42. Površina kupe je $P=\pi r(r+s)$, gde r i s označavaju dužinu poluprečnika osnove kupe i dužinu izvodnice kupe, redom. Po uslovu zadatka je $m=r+s$. Iz $s=\dfrac{r}{\sin\alpha}$, $r+s=m$ i činjenice da je $\sin\alpha\neq 0$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$, dobijamo

$$r\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)=m.$$

Odatle je

$$P=\pi\frac{m^2}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}.$$

Prijemni ispit septembra 1996.

43. Označimo zbir na levoj strani jednakosti sa S_n. Dokaz tvrđenja izvodima indukcijom po n. Za $n=1$, tvrđenje je očigledno tačno.

Pretpostavimo da jednakost važi za $n\in N$, tj. da je $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. Treba dokazati da je $S_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$.

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=S_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right).\end{aligned}$$

Prema tome, jednakost je tačna za svako $n\in N$.

44. Primenom adicionih formula za zbir i razliku kosinusa, kao i za kosinus dvostrukog ugla, dobija se sledeći niz ekvivalentnih jednačina :

$$\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$$
$$2\cos 4x \cos 2x - \cos 8x = 1$$
$$2\cos 4x \cos 2x - \cos^2 4x + \sin^2 4x = \cos^2 4x + \sin^2 4x$$
$$\cos 4x \cos 2x - \cos^2 4x = 0$$
$$\cos 4x(\cos 2x - \cos 4x) = 0$$
$$2\cos 4x \sin 3x \sin x = 0.$$

Iz poslednje jednačine sledi

$$\cos 4x = 0 \vee \sin 3x = 0 \vee \sin x = 0$$
$$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in Z) \vee 3x = l\pi (l \in Z) \vee x = m\pi (m \in Z)$$
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} (k \in Z) \vee \quad x = \frac{l\pi}{3} (l \in Z) \quad \vee x = m\pi (m \in Z).$$

45. Logaritmovanjem obe strane jednačine za osnovu p = 1996, dobijamo

$$(\log_p x)^2 = (2\log_p x + \log_p 27)\log_p 3.$$

Podelimo obe strane jednačine sa $(\log_p x)^2$ i iskoristimo pravilo $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$. Dobijamo

$$(\log_3 x)^2 = 2\log_3 x + \log_3 27 = 2\log_3 x + 3.$$

Ovo je kvadratna jednačina po $\log_3 x$. Njena rešenja su

$$\log_3 x = 3 \quad \text{i} \quad \log_3 x = -1.$$

Odatle se dobijaju rešenja polazne jednačine

$$x_1 = 27 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

46. Jednačina kruga sa centrom u $O(p,q)$ i poluprečnikom r ima oblik

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Tačke M i N pripadaju kružnici, a tačka O pravoj $2x - 3y + 19$. Iz toga dobijamo sistem jednačina

$$2p - 3q + 19 = 0$$
$$(10-p)^2 + (9-q)^2 = r^2$$
$$(4-p)^2 + (3-q)^2 = r^2.$$

Iz poslednje dve jednačine dobijamo $(10-p)^2 + (9-q)^2 = (4-p)^2 + (3-q)^2$, odakle je $p + q = 13$. Rešavanjem sistema

$$2p - 3q + 19 = 0$$
$$p + q = 13$$

dobijamo $p = 4$, $q = 9$ i $r = 6$ (jer je $r > 0$). Prema tome, tražena jednačina kružnice je

$$(x-4)^2 + (y-9)^2 = 36.$$

47. Neka je $\overline{ab}$ traženi dvocifreni broj. Tada važi

$$\overline{ab} \cdot a = 175 \text{ i } \overline{ab} \cdot b = 105.$$

Očigledno je $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Brojevi $\overline{ab}$, a i b su prirodni, pa deljenjem prve jednačine drugom dobijamo

$$\frac{b}{a} = \frac{5}{3}.$$

Iz toga što su a i b cifre, sledi $a = 3$ i $b = 5$, tj. traženi broj je 35.

48. Neka je h visina date zarubljene piramide, a r_1 i r_2, redom, poluprečnici kružnica opisanih oko njenih osnova B_1 i B_2 (B_1 i B_2 su jednakostranični trouglovi). Sa h_i i a_i označimo visinu, odnosno stranicu trougla B_i, $i = 1, 2$.

Kako su osnove jednakostranični trouglovi, to je

$$r_i = \frac{2}{3} h_i \text{ i } h_i = \frac{\sqrt{3}}{2} a_i, \ i = 1, 2,$$

tj.

$$h_i = \frac{3}{2} r_i \text{ i } a_i = \sqrt{3} r_i, \ i = 1, 2 \ .$$

Odatle sledi da je

$$P_{B_i} = \frac{1}{2} a_i h_i = \frac{3\sqrt{3}}{4} r_i^2, \ i = 1, 2.$$

Zamenom datih vrednosti za h, r_1 i r_2 u formuli za izračunavanje zapremine zarubljene piramide

$$V = \frac{h}{3}\left(P_{B_1} + \sqrt{P_{B_1} P_{B_2}} + P_{B_2}\right),$$

dobijamo

$$V = \frac{17\sqrt{3}}{4}\left(17 + 2\sqrt{15}\right)\text{cm}^3.$$

Prijemni ispit jula 1997.

49. Označimo izraz na levoj strani sa L. Na $L \cdot \sin\frac{x}{2^n}$ primenimo n puta formulu za sinus dvostrukog ugla. Dobijamo

$$L\cdot\sin\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cdot\dots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\dots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{2^2}\cos\frac{x}{2}\cdot\dots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}=\dots=\frac{1}{2^n}\sin x.$$

Odatle dobijamo $L=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

50. Da bi logaritamske funkcije u zadatku bile definisane, mora da važi $x>0$ i $y>0$. Označimo $a=\log_2 x$ i $b=\log_3 y$. Tada se dati sistem svodi na

$$5|a|-2b=0$$
$$2a+b=9.$$

Iz druge jednačine je $b = 9 - 2a$, a zamenom b u prvoj jednačini dobija se

$$5|a|+4a=18.$$

Ako je $a\ge 0\,(x\ge 1)$, onda jednačina dobija oblik $9a = 18$, tj. $a = 2$ i $b = 5$. Odatle je $x=2^2=4$, a $y=3^5=243$.

Ako je $a<0$ $(0<x<1)$, onda jednačina dobija oblik $-a = 18$, tj. $a = -18$ i $b = 45$. Odatle je $x=2^{-18}$ i $y=3^{45}$.

51. Da bi koren $\sqrt{3x^2+5x-6}$ bio definisan, mora da važi $3x^2+5x-6\ge 0$, a odavde je

$$x\in\left(-\infty,\frac{-5-\sqrt{97}}{6}\right]\cup\left[\frac{-5+\sqrt{97}}{6},+\infty\right).$$

U slučaju da je $x>0$, skraćivanjem sa x polazna jednačina postaje

$$\sqrt{3x^2+5x-6}<x+2,$$

a pošto su obe strane nejednačine pozitivne, kvadriranjem dobijamo

$$3x^2+5x-6<(x+2)^2 \Leftrightarrow 2x^2+x-10<0.$$

Poslednja nejednačina je zadovoljena za $x\in\left(-\frac{5}{2},2\right)$, što zajedno sa prethodnim uslovom daje

$$x\in\left[\frac{-5+\sqrt{97}}{6},2\right).$$

U slučaju $x<0$ dobijamo nejednačinu

$$\sqrt{3x^2+5x-6}>x+2.$$

Međutim, zbog prvog uslova je $x<\frac{-5-\sqrt{97}}{6}$, pa je $x+2<0\le\sqrt{3x^2+5x-6}$ i nejednačina je zadovoljena za svako $x\in\left(-\infty,\frac{-5-\sqrt{97}}{6}\right]$.

Konačno, skup rešenja date nejednačine je

$$\left(-\infty, \frac{-5-\sqrt{97}}{6}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{97}}{6}, 2\right).$$

52. Neka je K krug koji zadovoljava uslove zadatka i neka je $O(x,y)$ njegov centar, a r njegov poluprečnik. Pošto krug K dodiruje y-osu, i to sa pozitivne strane x-ose, zaključujemo da je $x = r$. Rastojanje između tačaka O i M je jednako r, a između tačaka O i (2,0) (što je centar kruga $(x-2)^2 + y^2 = 1$) je jednako $r+1$. Iz ovoga dobijamo sistem jednačina

$$(r-4)^2 + (y-3)^2 = r^2$$
$$(r-2)^2 + y^2 = (r+1)^2$$

Iz druge jednačine sledi da je $y^2 = 6r - 3$, a zamenom ovog izraza u prvu jednačinu, dobijamo $y = \frac{11-r}{3}$. Iz ova dva izraza dobijamo kvadratnu jednačinu

$$6r - 3 = \left(\frac{11-r}{3}\right)^2$$

čija su rešenja $r = 2$ i $r = 74$. Dakle, postoje dva kruga koja ispunjavaju uslove zadatka: prvi sa centrom u (2,3) i poluprečnikom 2 ima jednačinu

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4,$$

a drugi sa centrom u (74,-21) i poluprečnikom 74 ima jednačinu

$$(x-74)^2 + (y+21)^2 = 74^2.$$

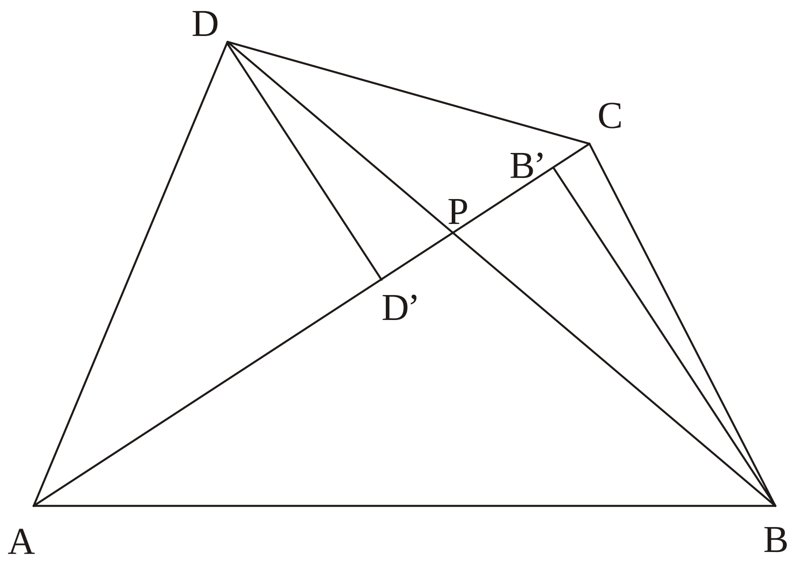
53. Ako brojevi $\log 2$, $\log(2^x - 1)$ i $\log(2^x + 3)$ predstavljaju tri uzastopna člana aritmetičkog niza, tada je

$$\begin{aligned}
2\log(2^x-1) &= \log 2 + \log(2^x+3) \Leftrightarrow \\
\log(2^x-1)^2 &= \log\left[2(2^x+3)\right] \Leftrightarrow \\
(2^x-1)^2 &= 2(2^x+3) \Leftrightarrow \\
(2^x)^2 - 4\cdot(2^x) - 5 &= 0 \Leftrightarrow \\
(2^x-5)(2^x+1) &= 0
\end{aligned}$$

Kako je $2^x + 1 > 0$ za svako $x \in R$, to je $2^x = 5$, tj. $x = \log_2 5$.

54. Neka su B' i D' podnožja normala na dijagonalu AC iz tačaka B i D, redom. Tada važi

$$P_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} AP \cdot BB'$$
$$P_{\Delta BCP} = \frac{1}{2} CP \cdot BB'$$
$$P_{\Delta CDP} = \frac{1}{2} CP \cdot DD'$$
$$P_{\Delta ADP} = \frac{1}{2} AP \cdot DD'$$



Iz jednakosti

$$P_{\Delta ABP} + P_{\Delta CDP} = P_{\Delta BCP} + P_{\Delta ADP}$$

sledi

$$AP \cdot BB' + CP \cdot DD' = CP \cdot BB' + AP \cdot DD'$$
$$\Leftrightarrow (AP - CP)(BB' - DD') = 0 \Leftrightarrow AP = CP \vee BB' = DD'.$$

Ako je $AP = CP$ tada P polovi dijagonalu AC i dokaz je završen. U suprotnom važi $BB' = DD'$, odakle zaključujemo da su trouglovi $\Delta BB'P$ i $\Delta DD'P$ podudarni, pošto su uglovu $\angle BB'P$ i $\angle DD'P$ pravi, a uglovi $\angle BPB'$ i $\angle DPD'$ jednaki kao unakrsni. No, iz podudarnosti trouglova $\Delta BB'P$ i $\Delta DD'P$ sledi da je $BP = DP$, odnosno tačka P polovi dijagonalu BD.

Prijemni ispit jula 1998.

55. Iz Vijetovih formula sledi da za rešenja x_1 i x_2 važi $x_1 + x_2 = 1$ i $x_1 x_2 = m - 1$. Dalje je

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = x_1 x_2 ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)$$
$$= (m-1)(1 - 2(m-1)) = (m-1)(3-2m).$$

Sada se data nejednačina svodi na kvadratnu nejednačinu

$$2m^2 - 5m + 2 \le 0,$$

koja je zadovoljena ako i samo ako $m \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

56. Da bi logaritamske funkcije u zadatku bile definisane, mora da važi $x > 0$ i $x \ne 1$. Neka je $a = \log_3 x$. Tada je

$$\log_x 3 = \frac{1}{a},\ \ \log_3 \sqrt{x} = \frac{a}{2},\ \ \log_{\sqrt{x}} 3 = \frac{2}{a}.$$

Sada jednačina postaje

$$\frac{1}{a}+a=\frac{2}{a}+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$$

što se lako svodi na kvadratnu jednačinu $a^2-a-2=0$, čija su rešenja $a=-1$ i $a=2$. Rešenja polazne jednačine su $x=\frac{1}{3}$ i $x=9$.

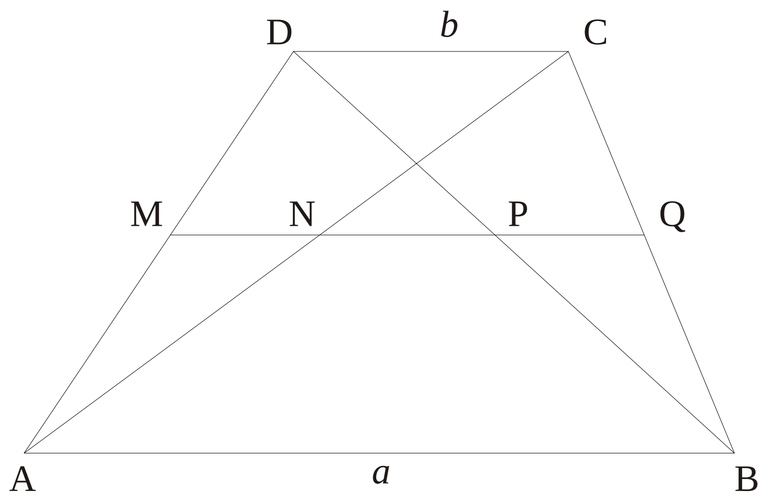
57. Korišćenjem adicionih formila i datih uslova dobijamo

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}=1.$$

Odavde sledi da je $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in Z)$. Međutim, kako su α i β oštri uglovi, to je $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$, pa je $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

58. Neka su *a* i *b* dužine gornje, odnosno donje osnovice trapeza *ABCD*. Neka su *M*, *N*, *P* i *Q* tačke preseka srednje linije trapeza sa kracima i dijagonalama ($M-N-P-Q$). Kako su *MN* i *PQ* sdednje linije trouglova *ADC* i *BDC*, redom, zaključujemo da je $MN=PQ=\frac{b}{2}$. Iz ovoga i $MQ=\frac{a+b}{2}$ sledi da je $NP=\frac{a-b}{2}$. Po uslovima zadatka je $NP=MN+PQ$ (jer je $MN=PQ$), pa dobijamo

$$\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=2\frac{b}{2}\Leftrightarrow a=3b\Leftrightarrow a:b=3:1.$$



59. Krug $x^2+y^2+8x-9=0$ ima centar u tački *O*(-4,0) i poluprečnik *r* = 5. Sada je $l=AO=5\sqrt{2}$.

a) Označimo $h=BC$. Četvorougao *ABOC* je deltoid sa površinom $\frac{lh}{2}$. S druge strane, ovaj deltoid je sastavljen od dva podudarna pravougla trougla ΔABO i ΔACO. Iz pravouglog trougla ΔABO sledi $AB=\sqrt{l^2-r^2}$, pa je površina četvorougla *ABOC* jednaka $2\cdot\frac{1}{2}\cdot r\sqrt{l^2-r^2}$, a iz toga sledi

$$\frac{lh}{2} = r\sqrt{l^2 - r^2} \Rightarrow \frac{h}{2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{l^2}}.$$

Dalje je

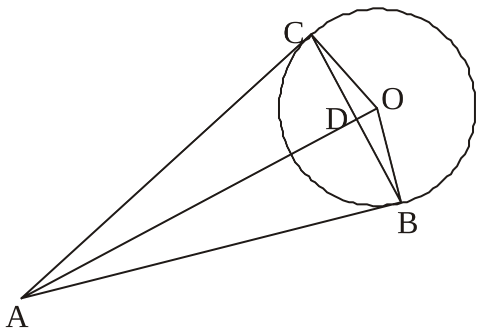
$$AD = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - r^2 - \left(r^2 - \frac{r^4}{l^2}\right)} = \sqrt{l^2 - 2r^2 + \frac{r^4}{l^2}} = \left| l - \frac{r^2}{l} \right|.$$

Površina trougla ΔABC je

$$P_{\Delta ABC} = AD \cdot \frac{h}{2} = \left| l - \frac{r^2}{l} \right| \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{l^2}} = \frac{25}{2}.$$

b) Pošto su uglovi $\angle ABO$ i $\angle ACO$ pravi, sledi da je četvorougao $ABOC$ tetivan i da je AO prečnik kruga opisanog oko trougla ΔABC. Odatle se lako dobija tražena jednačina kruga

$$\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

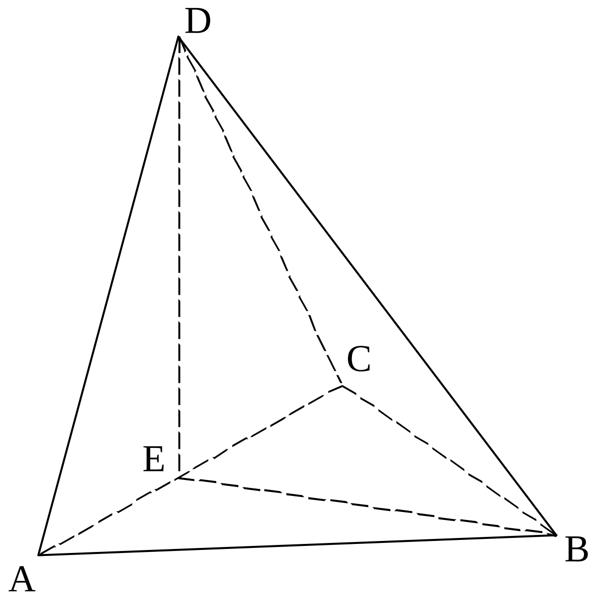


60. Ako za osnovu piramide uzmemo jedan od ovih jednakostraničnih trouglova, tada je visina piramide jednaka visini $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ drugog jednakostraničnog trougla. Odatle dobijamo da je zapremina date piramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\,\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^3}{8}.$$

Da bi odredili površinu piramide moramo naći površine preostalih strana. Sve ivice piramide, osim BD su jednake a. Ivica BD, zajedno sa visinama BE i DE jednakostraničnih trouglova ΔABC i ΔACD čini jednakokrakro-pravougli trougao, pa je $BD = \frac{a}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$. Sada je visina koja odgovara ivici BD u jednakokrakom trouglu ΔABD jednaka $\sqrt{a^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{10}$. Konačno, površina piramide je

$$P = 2\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{a}{4} \cdot \sqrt{10} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}(2 + \sqrt{5}).$$



Prijemni ispit jula 1999.

61. Neka je $A=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$. Tada važi

$$A^3=40+3\sqrt[3]{8\cdot(20+14\sqrt{2})}3\sqrt[3]{8\cdot(20-14\sqrt{2})}\Leftrightarrow$$

$$A^3=40+6A\Leftrightarrow A^3-6A-40=0\Leftrightarrow(A-4)(A^2+4A+10)=0.$$

Kako jednačina $A^2+4A+10=0$ nema realnih rešenja (a A je realan broj), zaključujemo da je $A=4$.

62. Neka je α traženi oštar ugao romba, h visina romba, a dužina stranice romba, a l dužina duži AE, gde je E presek dijagonala romba AC i BD. Zapremina tela koje se dobija kada romb rotira oko stranice AB je jednaka zapremini valjka sa visinom a i poluprečnikom osnove h. Zapremina tela koje se dobija kada romb rotira oko dijagonale AC se dobija kao dvostruka zapremina kupe sa visinom l i prečnikom osnove BD.

Važi da je

$$h=a\sin\alpha,\ l=a\cos\tfrac{\alpha}{2}\ \text{ i }\ \tfrac{BD}{2}=a\sin\tfrac{\alpha}{2}.$$

Iz ovoga dobijamo

$$V_1=h^2\pi a=a^3\pi\sin^2\alpha$$

$$V_2=\frac{2}{3}l\left(\tfrac{BD}{2}\right)^2=\frac{2}{3}\pi a^3\sin^2\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}$$

Iz uslova zadatka je $V_1:V_2=9:\sqrt{3}$, a iz dobijenih jednakosti

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{2}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=3\frac{\sin^2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=6\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Prema tome, dobijamo da važi

$$6\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{9}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}.$$

63. Ako je $\log_2 x>0\,(x\geq 1)$, dobija se sistem jednačina (označimo $a=\log_2 x$ i $b=\log_3 y$)

$$\begin{aligned}4a-3b&=2\\2a+b&=6\end{aligned}$$

čija su rešenja $a=2$ i $b=2$. Iz toga dobijamo $x=4$ i $y=9$.
Ako je $\log_2 x<0\,(0<x<1)$ dobija se sistem

$$\begin{aligned}-4a-3b&=2\\2a+b&=6\end{aligned}$$

čija su rešenja $a=10$ i $b=14$. Iz ovoga bi trebalo da važi $x=2^{10}$, ali kako je $0<x<1$, zaključujemo da ovo nije rešenje polaznog sistema. Znači, sistem ima jedinstveno rešenje $x=4$ i $y=9$.

64. Neka su dužine stranica datog trougla $b-d$, b i $b+d$ ($b>0, d>0$). U tom slučaju je obim tog trougla jednak $3b$. Površina jednakostraničnog trougla sa tim obimom je $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Za određivanje površine datog trougla koristimo Heronov obrazac

$$P=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{b}{2}+d\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-d\right)}=\frac{b\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4}-d^2},$$

gde je S poluobim trougla, a a, b i c su dužine stranica trougla.
Korišćenjem uslova zadatka dobijamo

$$\frac{b\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4}-d^2}=\frac{3}{5}\frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Iz ovoga sledi

$$10\sqrt{\frac{b^2}{4}-d^2}=3b^2\Leftrightarrow 25b^2-100d^2=9b^2\Leftrightarrow 16b^2=100d^2.$$

Kako su i b i d veći od 0, zaključujemo da važi $d=\frac{2}{5}b$. Konačno, traženi odnos stranica trougla je

$$a:b:c=\frac{3}{5}:1:\frac{7}{5}.$$

65. Da bi jednačina imala realna rešenja, mora da važi

$$\begin{gathered}D=16k^2-4(k-2)(k-5)\geq 0\Leftrightarrow\\12k^2+28k-40\geq 0.\end{gathered}$$

Rešavanjem ovog sistema nejednačina dobijamo

$$k \in (-\infty, -\tfrac{10}{3}] \cup [1, +\infty).$$

Neka su x_1 i x_2 rešenja date jednačine. Ona su različitog znaka ako je $x_1 x_2 < 0$. Korišćenjem Vijetovih formula dobijamo $x_1 x_2 = \frac{k-2}{k-5}$. Odatle dobijamo da mora da važi $k \in (2,5)$. Ovo je i konačno rešenje jer ovaj interval pripada intervalu u kome je $D \geq 0$.

66. Važi

$$3\sin x = 2(1-\cos x) \quad \Leftrightarrow$$
$$3\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = 2\sin^2\tfrac{x}{2}$$

Ako je $\sin\frac{x}{2} = 0$, onda je rešenje $x = 2k\pi (k \in Z)$. Inače je

$$3\cos\tfrac{x}{2} = 2\sin\tfrac{x}{2} \Leftrightarrow \tan\tfrac{x}{2} = \tfrac{3}{2}.$$

Konačno, dobijamo

$$\frac{x}{2} = \arctan\frac{3}{2} + k\pi (k \in Z) \Leftrightarrow x = 2\arctan\frac{3}{2} + 2k\pi (k \in Z).$$

Prijemni ispit septembra 2000.

67. Da bi logaritamske funkcije u zadatku bile definisane, mora da važi $x+1>0$ i $x \neq 0$, tj. $x \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$.

Uvedimo smenu $t = \log_2(x+1)$. Nejednačina tada dobija oblik

$$t + \frac{1}{t} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 5t + 2}{t} \geq 0 \Leftrightarrow 2\frac{(t-2)(t-1/2)}{t} \geq 0.$$

Iz poslednje nejednačine dobijamo $t \in (0,1/2] \cup [2,+\infty)$.

U prvom slučaju je $0 < \log_2(x+1) \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < x+1 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x \leq \sqrt{2} - 1$, a u drugom $\log_2(x+1) \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Konačno, $x \in (0, \sqrt{2}-1] \cup [3,+\infty)$.

68. Korišćenjem adicionih formula dobijamo sledeći niz ekvivalentnih jednačina

$$\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x = \cos^4\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$
$$\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \sin 4x = -\frac{1}{4}$$

Iz poslednje jednačine dobijamo

$$4x = -\arcsin\frac{1}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad 4x = \pi + \arcsin\frac{1}{4} + 2l\pi, \qquad k, l \in Z$$

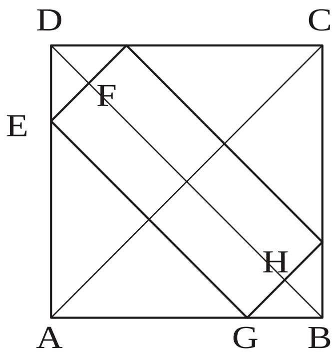
69. Korišćenjem Vijetovih pravila dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 x_2 &= q \\ x_1 + x_2 + 2 &= p^2 \\ (x_1+1)(x_2+1) &= pq \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2 - p &= p^2 \\ q - p + 1 &= pq \end{aligned}$$

Dakle, moguće vrednosti za *p* su $p = -2$ i $p = 1$. Za $p = -2$ druga jednačina dobija oblik $q + 3 = -2q$, pa je $q = -1$. Za $p = 1$, druga jednačina je zadovoljena za svaki broj *q*. Znači, vrednosti parametara *p* i *q* koje zadovoljavaju uslove zadatka su

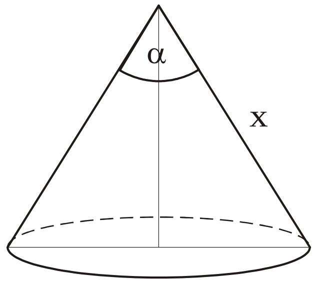
$$(p, q) = (-2, -1) \text{ i } (p, q) = (1, q),\ q \in R$$

70. Neka je dužina stranice kvadrata jednaka *a*, a dužine stranica upisanog pravougaonika neka su *x* i *y*.



Trouglovi ΔBGH i ΔDEF su jednakokrako-pravougli, pa je $\overline{GH} = \overline{BH} = \overline{DF} = \overline{EF} = \frac{y}{2}$. Odatle zaključujemo da je $x + y = \overline{BD} = a\sqrt{2}$. Dakle, površina pravougaonika je $xy = x(a\sqrt{2} - x)$, a ova kvadratna funkcija dostiže maksimum za $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, pa površina pravougaonika ne može biti veća od $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$, tj. ne može biti veća od polovine površine kvadrata.

71. Neka je *r* poluprečnik osnove kupe.



Kako se razvijanjem omotača dobija polukrug, a obim osnove kupe je jednak kružnom luku koji odredjuje razvijeni omotač, zaključujemo da važi $x\pi = 2r\pi$, tj. $r = \frac{x}{2}$, pa je ugao pri vrhu kupe jednak 60°.

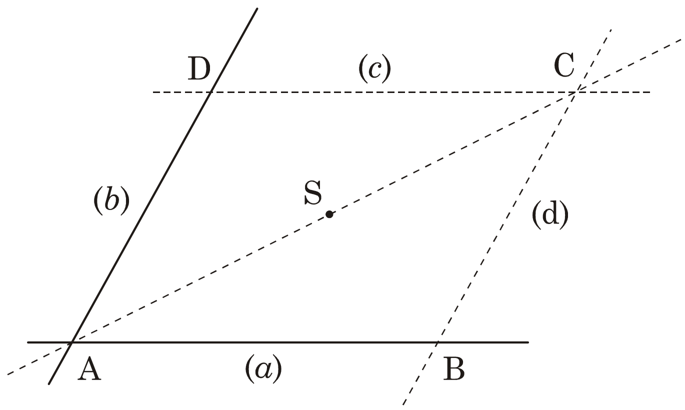
Površina kupe je $P = r^2\pi + r\pi x = \frac{3x^2}{4}\pi$, a zapremina $V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3}\frac{x^2}{4}\pi\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^3\pi\sqrt{3}}{24}$.

72. Jednačine datih pravih su

$$(a): y = \frac{x}{3} + \frac{16}{3}$$
$$(b): y = 3x - 16$$

Temena *A* paralelograma dobijamo kao presek pravih *a* i *b*. Rešavanjem gornjeg sistema jednačina dobijamo da je $A(8,8)$.

Tačka $S(4,4)$ je središte paralelograma i nalazi se izmedju temena *A* i *C*, pa je $AS = SC$. Odatle zaključujemo da je $C(0,0)$.



Kako prava *c* sadrži tačku $C(0,0)$ i paralelna je sa pravom *a*, to je njena jednačina

$$(c): y = \frac{x}{3}$$

Slično, zaključujemo da je jednačina prave *d*

$$(d): y = 3x$$

Tačke *B* i *D* dobijamo, redom, kao preseke pravih *a* i *d*, odnosno *b* i *c*. Dobijamo da je $B(2,6)$ i $D(6,2)$.

Koeficijent pravca dijagonale *AC* je 1, a dijagonale *BD* je -1, pa su dijagonale međusobno normalne, tj. *ABCD* je romb.

Prijemni ispit septembra 2000.(drugi rok)

73. $\frac{4}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}(a^2\sqrt{b})^{-1/2}\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-1}=$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\frac{1}{a\sqrt[4]{b}}\frac{a\sqrt{ab}+ab-ab}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\frac{a-b}{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}=$$

$$\frac{4\sqrt{ab}(a-b)}{\sqrt{b}\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=4$$

74. Korišćenjem Vijetovih pravila dobijamo da važi

$$x_1+x_2=-2(m+1) \text{ i } x_1x_2=m.$$

Kako je $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{x_1^2x_2^2}=\frac{4(m+1)^2-4m}{m^2}=4\frac{m^2+m+1}{m^2}$, to je

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>8 \Leftrightarrow 4\left(\frac{m^2+m+1}{m^2}-2\right)>0 \Leftrightarrow -m^2+m+1>0 \Leftrightarrow (m-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(m-\frac{1-\sqrt{5}}{2})<0.$$

Poslednja nejednačina je zadovoljena za $m\in(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

75. Korišćenjem adicionih formula dobijamo

$$\sin 3x\sin 5x=\sin 4x\sin 6x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 8x-\cos 2x)=-\frac{1}{2}(\cos 10x-\cos 2x) \Leftrightarrow$$

$$\cos 10x-\cos 8x=0 \Leftrightarrow -2\sin 9x\sin x=0 \Leftrightarrow \sin 9x=0 \vee \sin x=0 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{k\pi}{9} \vee x=l\pi \quad (k,l\in Z)$$

76. Da bi logaritamske funkcije u zadatku bile definisane, mora da važi

$$x>0,\ x\neq 1,\ x\neq\frac{1}{3},\ x\neq\frac{1}{9}.$$

Korišćenjem svojstava logaritma, početna jednačina postaje

$$\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{1+\log_3 x}+\frac{3}{2+\log_3 x}=0.$$

Uvedemo smenu $\log_3 x=t$.

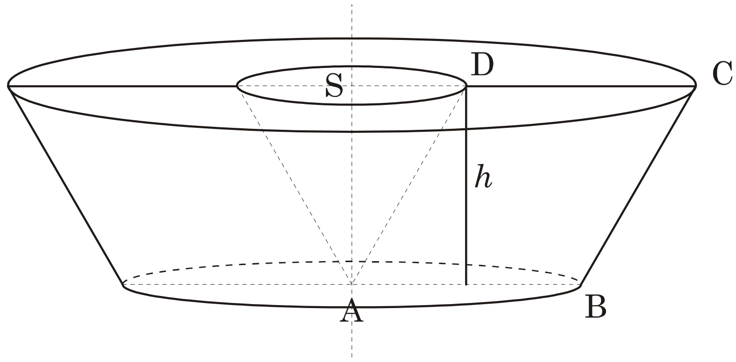
$$\frac{2}{t}+\frac{1}{1+t}+\frac{3}{2+t}=0 \Leftrightarrow 2(1+t)(2+t)+t(2+t)+3t(1+t)=0 \Leftrightarrow$$

$$6t^2+11t+4=0$$

Rešenja poslednje kvadratne jednačine su $t_1=-\frac{4}{3}$ i $t_2=-\frac{1}{2}$.

Dakle, $\log_3 x=-\frac{4}{3} \vee \log_3 x=-\frac{1}{2}$, tj $x=\frac{1}{3\sqrt{3}} \vee x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

77. Dobijeno telo je zarubljena kupa visine jednake visini romba, iz čijeg je centra isečena kupa iste visine (vidi sliku).



Po uslovima zadatka je $AC = 6cm$ i $\angle BAD = 60^\circ$. Iz toga sledi da je trougao ΔABD jednakostraničan sa visinom $3cm$. Ako sa a označimo dužinu duži AB, onda je

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3cm \Rightarrow a = 2\sqrt{3}cm$$

Takođe, $SD = AB/2 = \sqrt{3}cm$. Zapremina zarubljene kupe je

$$V_{z.k.} = \frac{h}{3}\pi(a^2 + a(a+\sqrt{3}) + (a+\sqrt{3})^2) = (12 + 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3} + 27)\pi = 57\pi\, cm^3,$$

a zapremina isečene kupe je

$$V_k = \frac{3\pi h}{3} = 3\pi\, cm^3.$$

Dakle, zapremina dobijenog tela je $V = 54\pi\, cm^3$.

Površina tela je površina zarubljene kupe, bez površine kruga sa poluprečnikom SD, a sa dodatom površinom omotača isečene kupe

$$P = (a+\sqrt{3})^2\pi + a^2\pi + a\pi(a + a + \sqrt{3}) - 3\pi + \pi a\sqrt{3} = 72\pi\, cm^2.$$

78. Kako traženi krug dodiruje x - osu i centar mu je na pravoj koja je normalna na x - osu u tački (-4,0), to je jednačina kružnice

$$(k): (x+4)^2 + (y-q)^2 = q^2,$$

gde je q dužina poluprečnika kružnice. Tačka (-5,7) pripada kružnici, pa zamenom njenih koordinata u jednačini dobijamo $q = \frac{25}{7}$. Dakle, tražena jednačina je

$$(k): (x+4)^2 + (y-\frac{25}{7})^2 = \frac{625}{49}.$$

Prijemni ispit jula 2001.

79. Označimo levu stranu jednakosti koju treba dokazati sa L_n, a desnu sa D_n. Kako je zbir prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$, to je $D_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Dokažimo da je i $L_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom po n. Za $n=1$, jednakost oči-gledno važi. Neka jednakost važi za proizvoljan prirodan broj n, tj. neka je $L_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Tada je

$$L_{n+1} = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = L_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$
$$\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

čime je dokaz završen.

80. Iz Vijetovih formula je $x_1x_2 = m+2$ i $x_1 + x_2 = m+3$. Odredimo najpre m tako da važi $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}$. Kako je $\frac{1}{2} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{m+3}{m+2}$, dobijamo da mora da važi $\frac{m+4}{2(m+2)} > 0$, što je ispunjeno kada su $m+4$ i $m+2$ istog znaka. Ako je vrednost svakog od tih izraza pozitivna, dobijamo da je $m > -2$, a ukoliko je negativna imamo da je $m < -4$. Dakle, iz uslova $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}$ nalazimo da je

$$m \in (-\infty,-4) \cup (-2,\infty). \qquad (1)$$

Odredimo sada za koje je m zadovoljena nejednakost $x_1^2 + x_2^2 < 5$. Kako je $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m+3)^2 - 2(m+2) = m^2 + 4m + 5$. Iz $x_1^2 + x_2^2 < 5$ nalazimo da je

$$m \in (-4,0). \qquad (2)$$

Iz uslova (1) i (2), zaključujemo da je $m \in (-2,0)$.

81. Da bi $\sqrt{\log(-x)}$ bio definisan, mora da bude zadovoljeno $-x > 0$ i $\log(-x) \geq 0$, odnosno da je $x < 0$ i $x \leq -1$. Dakle, mora da važi $x \leq -1$. Da bi desna strana jednakosti bila definisana, mora biti $\sqrt{x^2} > 0$, odnosno $x \neq 0$. Dakle, obe strane jednakosti definisane su za $x \leq -1$. Imajući ovo na umu, dobijamo $\sqrt{\log(-x)} = \log\sqrt{x^2} = \log|x| = \log(-x)$, odakle je $\log(-x) = 0$ ili $\log(-x) = 1$. Odavde sledi da su jedina rešenja polazne jednačine $x = -1$ i $x = -10$.

82. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x < \frac{3}{4}$, odakle nalazimo da je $\frac{1}{2} < 4\sin^2 x\cos^2 x$, te koristeći činjenicu da je $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, imamo $\frac{1}{2} < \sin^2 2x$. Odavde sledi da je $\sin 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ili $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 2x$. Nejednačina

$\sin 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, zadovoljena je u slučaju da je $2x \in (\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in Z$, dok je nejednačina $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 2x$, zadovoljena u slučaju da je $2x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in Z$. Otuda su rešenja početne nejednačine one vrednosti x za koje je zadovoljeno da $2x \in (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, $k \in Z$, odnosno $x \in (\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$, $k \in Z$.

83. Posmatrajmo trougao koji se nalazi u poprečnom preseku kupe. Označimo temena tog jednakokrakog trougla sa A, B i C, gde je osnovica AB jednaka prečniku osnove kupe, $2r$. Ako sa O označimo centar upisane kružnice u taj trougao, a sa D i E redom dodirne tačke tog kruga sa stranicama AB i BC, znamo da je $\angle COE = \alpha$, $OD = OE = R$. Iz pravouglog trougla COE imamo da je $CO = \frac{R}{\cos\alpha}$, pa je

$$H = CD = CO + OD = R(1 + \frac{1}{\cos\alpha}) = R\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2R\frac{\cos^2 \alpha/2}{\cos\alpha} = 2R\frac{\cos^2 \alpha/2}{\sin\alpha} \cdot tg\alpha .$$

Korišćenja identiteta $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, dobijamo da je $H = R \cdot ctg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha$. Kako je i $\angle CBD = \alpha$, iz trougla CBD imamo da je $r = \frac{H}{tg\alpha}$, te je $r = R \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$. Sada lako nalazimo da je $V = \frac{1}{3}BH = \frac{\pi}{3}r^2 H = \frac{\pi}{3}R^3 ctg^3\frac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha$. Treba odrediti još i površinu kupe, koja je jednaka $P = r\pi(r+s)$, gde je s dužina izvodnice kupe, odnosno dužina duži CD. Iz trougla CBD imamo da je $s = \frac{r}{\cos\alpha} = R\frac{ctg\,\alpha/2}{\cos\alpha}$. Zato koristeći navedenu formulu za površinu imamo da je $P = \pi R^2 ctg^2\frac{\alpha}{2}(1 + \frac{1}{\cos\alpha}) = \pi R^2 ctg^3\frac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha$.

84. Ukoliko znamo jednačine dve prave u eksplicitnom obliku $y = k_i x + n_i, i = 1,2$, za neorijentisan ugao između njih važi relacija $tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$. Neka je jednačina tražene tangente $y = k_2 x + n_2$. Iz gore navedene relacije i jednačine date prave $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, imamo da je $1 = tg45^0 = \left|\frac{k_2 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}k_2}\right|$, odakle je $k_2 = \frac{1}{3}$ ili $k_2 = -3$. Iskoristimo sada formulu za rastojanje tačke (x_0, y_0) od prave čija je jednačina $Ax + By + c = 0$, koje je dato sa $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Naime, centar date kružnice je tačka $(0,0)$ čije rastojanje od prave $k_2 x - y + n_2 = 0$ jednako poluprečniku kružnice, odnosno $\sqrt{5}$. Zato je $\frac{|n_2|}{\sqrt{k_2^2 + 1}} = \sqrt{5}$. Kako

smo našli da je $k_2 = \frac{1}{3}$ ili $k_2 = -3$, to za $k_2 = \frac{1}{3}$ dobijamo $n_2 = \pm\frac{5\sqrt{2}}{3}$, a za $k_2 = -3$ dobijamo $n_2 = \pm 5\sqrt{2}$. Dakle, postoje ukupno četiri prave koje zadovoljavaju sve uslove zadatka i njihove jednačine su $y = \frac{1}{3}x + \frac{5\sqrt{2}}{3}$, $y = \frac{1}{3}x - \frac{5\sqrt{2}}{3}$, $y = -3x + 5\sqrt{2}$, $y = -3x - 5\sqrt{2}$.