

1	2	3	4	5	6	Σ

UNIVERZITET U NIŠU
 PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
 DEPARTMAN ZA RAČUNARSKE NAUKE

sreda 04.07.2012.

MATEMATIKA

- Dokazati da je: $5^{n-1} + 2^n$ deljivo sa 3, gde je n prirodan broj.
- Naći korene x_1 i x_2 polinoma $f(x) = 2x^2 - (c + 1)x + c - 1$, ako je

$$x_1 - x_2 = x_1x_2, \quad \text{ i } c \in \mathbb{R}.$$
- Rešiti jednačinu: $\sin^2 4x + \sin^2 2x = \frac{3}{2}$.
- Izračunati površinu jednakokrakog trapeza, ako su mu dijagonale uzajamno normalne, dužina kraka jednaka 10cm i ugao između veće osnovice i kraka 60° .
- Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka $M(x, y)$ u ravni, tako da je $\frac{AM}{BM} = \frac{2}{3}$, gde su A i B tačke $A(1, 1)$ i $B(6, 6)$.
- Zbir koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana u razvojnom obliku binoma $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ jednak je 46. Odrediti član koji ne sadrži x .

Napomena: Prijemni ispit traje 120 min. Pri izradi zadataka rešenja ispisati detaljno.

REŠENJA ZADATAKA PRIJEMNOG ISPITA

1. Tvrdjenje dokazujemo korišćenjem principa matematičke indukcije:

1) Za $n = 1$ tvrdjenje važi, jer je

$$5^{1-1} + 2^1 = 5^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3,$$

odnosno dobijena vrednost izraza je 3 što je deljivo sa 3.

2) Indukcijska pretpostavka: Neka tvrdjenje važi za $n = k$, tj. neka je $5^{k-1} + 2^k$ broj oblika $3m$ (deljiv sa 3).

3) Dokazujemo da tvrdjenje važi za $n = k + 1$. Imamo da je

$$5^{k+1-1} + 2^{k+1} = 5^k + 2^{k+1} = 5 \cdot 5^{k-1} + 2 \cdot 2^k = 3 \cdot 5^{k-1} + 2 \cdot 5^{k-1} + 2 \cdot 2^k = 3 \cdot 5^{k-1} + 2(5^{k-1} + 2^k) = 3 \cdot 5^{k-1} + 2 \cdot 3m,$$

pa je jasno da smo dobili broj deljiv sa 3. Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n .

2. Prema Vietovim formulama za korene x_1 i x_2 polinoma $f(x)$ važi:

$$x_1 + x_2 = \frac{c+1}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{c-1}{2}.$$

Kako je

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2,$$

to dobijamo

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ \Leftrightarrow \frac{(c-1)^2}{4} &= \frac{(c+1)^2}{4} - 4 \frac{c-1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{c^2 - 2c + 1}{4} &= \frac{c^2 + 2c + 1}{4} - 4 \frac{c-1}{2} \\ \Leftrightarrow -2c &= 2c - 8(c-1) \\ \Leftrightarrow 4c &= 8 \quad \Leftrightarrow \quad c = 2. \end{aligned}$$

Koreni polinoma su rešenja kvadratne jednačine $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Rešavanjem jednačine dobijamo da je $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. Korišćenjem jednakosti:

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2} \quad \text{i} \quad \sin^2 4x = 1 - \cos^2 4x$$

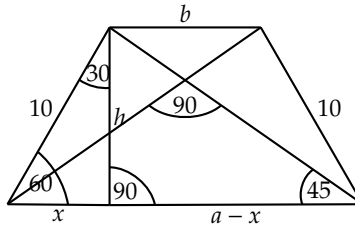
dobijamo jednačinu: $\cos 4x(1 + 2 \cos 4x) = 0$. Odavde je $\cos 4x = 0$ ili $\cos 4x = -\frac{1}{2}$, odnosno

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{tj. } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

ili

$$4x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi, \quad \text{tj. } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{m\pi}{2}, \quad m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

4. Primitimo da je $x = \frac{10}{2} = 5$ (stranica naspram ugla od 30° u pravouglom trouglu). Odavde je jasno da je $h = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.



Kako su dijagonale jednakokrakog trapeza međusobno normalne, one sa većom osnovicom a zaklapaju uglove od 45° , pa je $a - x = h = 5\sqrt{3}$, odnosno

$$a = x + h = 5 + 5\sqrt{3} = 5(1 + \sqrt{3}).$$

Prema tome $b = a - 2x = 5 + 5\sqrt{3} - 10 = 5\sqrt{3} - 5 = 5(\sqrt{3} - 1)$. Površina trapeza je

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{10\sqrt{3}}{2} \cdot 5\sqrt{3} = 25 \cdot 3 = 75.$$

5. Traženo geometrijsko mesto tačaka $M(x, y)$ dobijamo iz uslova da je

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x-1)^2 + (y-1)^2, & BM^2 &= (x-6)^2 + (y-6)^2 & \text{i} \\ \frac{AM^2}{BM^2} &= \frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2}{(x-6)^2 + (y-6)^2} &= \frac{4}{9} \\ \Leftrightarrow 9((x-1)^2 + (y-1)^2) &= 4((x-6)^2 + (y-6)^2) \\ &\vdots \\ \Leftrightarrow 5((x+3)^2 + (y+3)^2) &= 360 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+3)^2 &= 72 \end{aligned}$$

6. Zbir koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana u razvoju binoma $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ je

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} &= 46 \\ \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} &= 46 \\ \Leftrightarrow n^2 + n &= 90 \\ \Leftrightarrow n^2 + n - 90 &= 0 \\ \Leftrightarrow n_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2} \\ \Leftrightarrow n_{1,2} &= \frac{-1 \pm 19}{2} \\ \Leftrightarrow n_1 = 9 & \quad n_2 = -10. \end{aligned}$$

Kako je n prirodan broj, to je $n = n_1 = 9$ i $k+1$. član u razvoju binoma je

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} (x^2)^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k,$$

pa je član u razvoju binoma koji ne sadrži x onaj član kod koga je $2(9-k) = k$. Odavde je $k = 6$, pa je traženi član

$$T_7 = \binom{9}{6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84.$$