ПРИЈЕМНИ ИСПИТ-тест из МАТЕМАТИКЕ

3. јули 2012. године

Време за рад је 180 минута. Тест има 6 задатака. Потребно је **детаљно образложити решење задатака и за сваки задатак заокружити тачан одговор**. Заокруживање тачног одговора доноси 10 поена по задатку. Погрешан одговор не доноси ни позитивне ни негативне поене. У случају заокруживања више од једног одговора добија се -1 поен.

Употреба калкулатора није дозвољена!

1. Ако је $A=\dfrac{\frac{32}{3}}{\frac{62}{75}-0{,}16}-25$ и $B=0{,}01\cdot 0{,}1-0{,}1:0{,}01+0{,}01:0{,}1$, тада вредност израза $A-B$ износи:

А) -18,899; Б) -0,899; В) 0,899; Г) -89,9; Д) 89,9.

2. Број целобројних решења неједначине $\dfrac{|x|}{x^2-x}>\dfrac{1}{3}$ је:

А) 2; Б) 3; В) 4; Г) 8; Д) већи од 8.

3. Нека је $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$ где су α,β из интервала $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тада је $\sin(2\alpha+\beta)$ једнако:

А) $-\dfrac{3}{5}$; Б) $\dfrac{3}{5}$; В) $\dfrac{6}{5}$; Г) $\dfrac{7}{5}$; Д) 0.

4. Осни пресек праве купе полупречника основе $\sqrt{3}cm$ је једнакостраничан троугао. Растојање од основе купе на које треба поставити раван паралелну основи купе која полови њену запремину износи:

А) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}cm$; Б) $\left(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)cm$; В) $3\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)cm$; Г) $3\cdot\sqrt[3]{2}cm$; Д) $\sqrt[3]{2}cm$.

5. Ортогонална пројекција тачке $\mathrm{M}(6,2)$ на правој $2x-3y+5=0$ је:

А) $\left(4,\dfrac{13}{3}\right)$; Б) $(-6,-2)$; В) $(2,6)$; Г) $\left(\dfrac{56}{13},\dfrac{59}{13}\right)$; Д) $\left(\dfrac{56}{13},\dfrac{57}{39}\right)$.

6. Површина трапеза $ABCD$ чија је мања основица $b=7\ cm$, висина $h=6\ cm$, а углови на већој основици $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ и $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ износи:

А) $66\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$; Б) $60\ \mathrm{cm}^2$; В) $3\left(10+\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2$; Г) $6\left(10+\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2$; Д) $6\left(10+2\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2$.

РЕШЕЊА

1. Ако је $A=\dfrac{\dfrac{32}{3}}{\dfrac{62}{75}-0{,}16}-25$ и $B=0{,}01\cdot 0{,}1-0{,}1:0{,}01+0{,}01:0{,}1$, тада вредност израза $A-B$ износи:

А) -18,899; Б) -0,899; В) 0,899; Г) -89,9; Д) 89,9.

2. Број целобројних решења неједначине $\dfrac{|x|}{x^2-x}>\dfrac{1}{3}$ је:

А) 2; Б) 3; В) 4; Г) 8; Д) већи од 8.

3. Нека је $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$ где су α,β из интервала $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Тада је $\sin(2\alpha+\beta)$ једнако:

А) $-\dfrac{3}{5}$; Б) $\dfrac{3}{5}$; В) $\dfrac{6}{5}$; Г) $\dfrac{7}{5}$; Д) 0.

4. Осни пресек праве купе полупречника основе $\sqrt{3}cm$ је једнакостраничан троугао. Растојање од основе купе на које треба поставити раван паралелну основи купе која полови њену запремину износи:

А) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}cm$; Б) $\left(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)cm$; В) $3\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)cm$; Г) $3\cdot\sqrt[3]{2}cm$; Д) $\sqrt[3]{2}cm$.

5. Ортогонална пројекција тачке $\mathrm{M}(6,2)$ на правој $2x-3y+5=0$ је:

А) $\left(4,\dfrac{13}{3}\right)$; Б) $(-6,-2)$; В) $(2,6)$; Г) $\left(\dfrac{56}{13},\dfrac{59}{13}\right)$; Д) $\left(\dfrac{56}{13},\dfrac{57}{39}\right)$.

6. Површина трапеза $ABCD$ чија је мања основица $b=7\ cm$, висина $h=6\ cm$, а углови на већој основици $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ и $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ износи:

А) $66\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$; Б) $60\ \mathrm{cm}^2$; В) $3\left(10+\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2$; Г) $6\left(10+\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2$; Д) $6\left(10+2\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}^2$.

Решење

Пријемни испит - Јун 2012.

1. Како је $A=\dfrac{\frac{32}{3}}{\frac{62}{75}-\frac{16}{100}}-25=\dfrac{\frac{32}{3}}{\frac{62}{75}-\frac{4}{25}}-25=\dfrac{\frac{32}{3}}{\frac{5\cancel{0}}{7\cancel{5}}}-25=\dfrac{\frac{32}{3}}{\frac{2}{3}}-25=$

$=\dfrac{32}{2}-25=16-25=-9,$ и

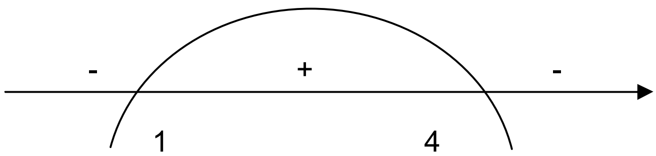
$B=0{,}001-10+0{,}1=0{,}101-10=-9{,}899,$ то је

$A-B=-9-\left(-9{,}899\right)=-9+9{,}899=0{,}899$.

2. $\dfrac{|x|}{x^2-x}>\dfrac{1}{3}$

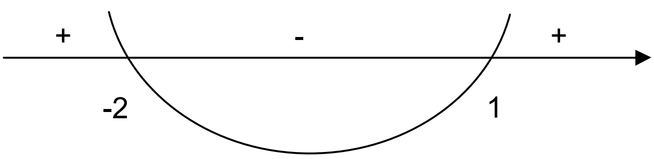
Ако је $x>0$, тада је дата неједначина еквивалентна са неједначином $\dfrac{x}{x^2-x}>\dfrac{1}{3}$, тј. $\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{1}{3}$. Даље је $\dfrac{3-x+1}{x-1}>0,$ тј. $\dfrac{4-x}{x-1}>0$.

Из знака квадратног тринома $(4-x)(x-1)$ закључујемо да $x\in(1,4)$.



Ако је $x<0$, тада имамо $\dfrac{-x}{x^2-x}>\dfrac{1}{3}$, тј. $\dfrac{-1}{x-1}>\dfrac{1}{3}$ или $\dfrac{-3-x+1}{x-1}>0$.

Дакле, добијамо $\dfrac{2+x}{x-1}<0$



Добијамо да $x\in(-2,1)$

Како је $x<0$, у овом случају, добијамо $x\in(-2,0)$

Решење полазне неједначине је $x\in(-2,0)\cup(1,4)$. Решења: -1,2,3.

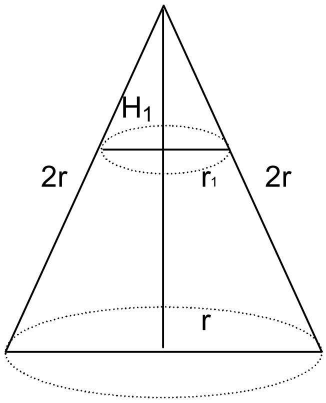
3. $\sin(2\alpha+\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta+\cos 2\alpha\sin\beta=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\beta=$

$$=2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,\cos\beta+(1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta}=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt2}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}\cdot\frac35+\left(1-2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\right)\sqrt{1-\left(\frac35\right)^2}=$$

$$=\sqrt2\sqrt{\frac12}\frac35+\left(1-2\left(\frac24\right)\right)\cdot\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac35+0\cdot\frac45=\frac35.$$

4.



$$H=\frac{2r\sqrt3}{2}=r\sqrt3$$

$$H_1=r_1\sqrt3$$

Пошто је V_1 запремина мале купе, V запремина велике купе добијамо:

$$V_1=\frac12 V\quad\Rightarrow\quad\frac{r_1^2\pi H_1}{3}=\frac12\frac{r^2\pi H}{3}\quad\Rightarrow\quad r_1^2r_1\sqrt3=\frac12 r^2r\sqrt3\quad\Rightarrow\quad r_1^3=\frac12 r^3$$

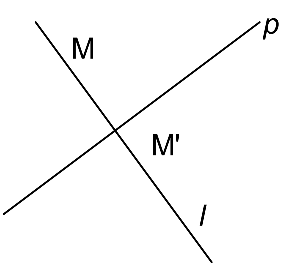
$$\Rightarrow r_1^3=\frac{(\sqrt3)^3}{2}\quad\Rightarrow\quad r_1=\frac{\sqrt3}{\sqrt[3]{2}}$$

како је $H_1=r_1\sqrt3=\frac{\sqrt3}{\sqrt[3]{2}}\sqrt3=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$, тражено растојање је

$$d=H-H_1=3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)cm$$

5. $p:\ 2x-3y+5=0\quad\Rightarrow\quad y=\frac23x+\frac53$

Пошто је коефицијент правца дате праве $k=\frac23$, то је коефицијент правца праве l ортогоналне на p једнак $-\frac32$.



Пошто тачка M припада правој $l:\ y=-\frac32x+n$, то је $n=2+\frac32\cdot6=11$. Дакле, $l:\ y=-\frac32x+11$, тј. $3x+2y-22=0$.

Тражена тачка M' се налази у пресеку праве p и l, па из решења система:

$$2x-3y+5=0 \quad /\cdot 2$$

$$3x+2y-22=0 \quad /\cdot 3$$

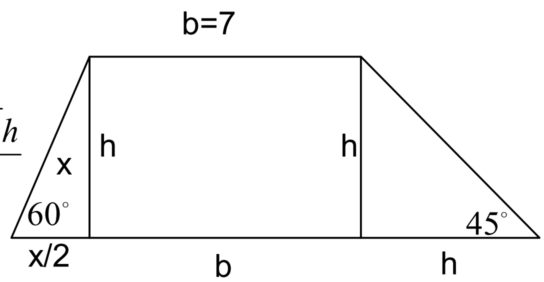
$$13x=56$$

$$x=\frac{56}{13}$$

$$\frac{112}{13}+\frac{65}{13}=3y \quad \Rightarrow \quad y=\frac{177}{39}=\frac{59}{13},$$ добијамо $M'=\left(\frac{56}{13},\frac{59}{13}\right)$.

6.

$$x=\frac{2\sqrt{3}h}{3}$$



$$a=b+\frac{h}{\sqrt{3}}+h=7+\frac{6}{\sqrt{3}}+6=13+\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=13+2\sqrt{3}$$

$$P=\frac{a+b}{2}h=\frac{13+2\sqrt{3}+7}{2}\cdot 6=\left(20+2\sqrt{3}\right)\cdot 3=$$

$$=60+6\sqrt{3}$$

$$P=60+6\sqrt{3}=6\left(10+\sqrt{3}\right)cm^2$$

$$h=\frac{x\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}h}{3}$$