R E Š E NJ A

Klasifikacionog ispita iz Matematike za 2012. godinu:

1. Uprostiti izraz $I = \dfrac{x^2+y^2}{xy} - \dfrac{x^2}{xy-y^2} + \dfrac{y^2}{x^2-xy}$.

$$I = \frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2}{y(x-y)} + \frac{y^2}{x(x-y)} = \frac{(x^2+y^2)(x-y) - x^3 + y^3}{xy(x-y)}$$
$$= \frac{x^3 + xy^2 - yx^2 - y^3 - x^3 + y^3}{xy(x-y)} = \frac{-xy(x-y)}{xy(x-y)} = \boxed{-1}\text{ , za } xy \neq 0, x \neq y.$$

2. Rastaviti na faktore polinom $P(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

$$P(x) = x^3(x^2-1) - (x^2-1) = (x^2-1)(x^3-1)$$
$$= (x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1) = \boxed{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)}\ .$$

3. Uprostiti izraz $I = \left(\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$.

$$I = \left(\frac{2^x+2^{-x}}{2} - \frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2} + \frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)$$
$$= \frac{2^x+2^{-x}-2^x+2^{-x}}{2}\cdot\frac{2^x+2^{-x}+2^x-2^{-x}}{2} = 2^{-x}\cdot 2^x = 2^{-x+x} = 2^0 = \boxed{1}\ .$$

4. Rešiti jednačinu $\dfrac{x^2-2x}{x^2-4} = 0$.

Za $x \neq \pm 2$ imamo da važi

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+2} = 0 \iff \boxed{x=0}\ .$$

5. Rešiti sistem jednačina $\dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{y} = 2 \ \wedge\ \dfrac{25}{x} - \dfrac{12}{y} = 3$.

Za $x \neq 0$ i $y \neq 0$, ako uvedemo smene $\dfrac{1}{x} = u$, $\dfrac{1}{y} = v$, dobijamo

$$5u + 6v = 2 \ \wedge\ 25u - 12v = 3 \iff u = \frac{1}{5} \ \wedge\ v = \frac{1}{6}.$$

S obzirom na uvedenu smenu rešenje sistema je $\boxed{x=5} \wedge \boxed{y=6}$.

6. Rešiti sistem jednačina $3x + 5y = 1 \ \wedge\ 3x - 2y = 8$.

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, dobijamo

$$-3x - 5y = -1 \ \wedge\ 3x - 2y = 8 \iff -7y = 7 \ \wedge\ 3x - 2y = 8$$
$$\iff y = -1 \ \wedge\ 3x + 2 = 8 \iff \boxed{x=2} \wedge \boxed{y=-1}\ .$$

7. Rešiti jednačinu $(x+1)^2-25=0$.

$(x+1)^2-25=0 \iff (x+1)^2-5^2=0 \iff (x+1-5)(x+1+5)=0 \iff (x-4)(x+6)=0 \iff x-4=0 \vee x+6=0 \iff \boxed{x=4} \vee \boxed{x=-6}$.

8. Za koju vrednost parametra $m \in \mathbb{R}$ kvadratna jednačina $mx^2+6x+3=0$ **nema** realna rešenja?

Jednačina nema realna rešenja ako i samo ako je $D=b^2-4ac<0$, tj. ako je

$$D=6^2-4\cdot m\cdot 3<0 \iff 36-12m<0 \iff \boxed{m>3}\ .$$

9. Rešiti nejednačinu $x^2+2x-15>0$.

$$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)>0 \iff$$
$$[(x+5<0 \wedge x-3<0) \vee (x+5>0 \wedge x-3>0)] \iff$$
$$[x<-5 \vee x>3] \iff \boxed{x\in(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)}\ .$$

10. Rešiti jednačinu $(2012)^{x^2-5x+4}=1$.

$(2012)^{x^2-5x+4}=1 \iff (2012)^{x^2-5x+4}=(2012)^0 \iff x^2-5x+4=0 \iff \boxed{x=1} \vee \boxed{x=4}$.

11. Rešiti jednačinu $\log_3(2x+3)=2$.

Za $2x+3>0 \iff x>-\frac{3}{2}$ je

$$\log_3(2x+3)=2 \iff 2x+3=3^2 \iff 2x=6 \iff \boxed{x=3}\ .$$

12. Izračunati vrednost izraza $I=\log_6 2+\log_6 3$.

$$I=\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\cdot 3)=\log_6 6=\boxed{1}\ .$$

13. Rešiti nejednačinu $\dfrac{x-1}{x+2}<1$.

Za $x\neq -2$, je $\dfrac{x-1}{x+2}<1 \iff \dfrac{x-1}{x+2}-1<0 \iff \dfrac{x-1-x-2}{x+2}<0 \iff \dfrac{-3}{x+2}<0$

$$\iff x+2>0 \iff x>-2 \iff \boxed{x\in(-2,+\infty)}\ .$$

14. Rešiti jednačinu $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

$4^x-5\cdot 2^x+4=0 \iff 2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0 \iff (2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0.$
Smenom $2^x=t$ dobijamo: $t^2-5t+4=0 \iff t=1 \vee t=4$, pa je:

$$4^x-5\cdot 2^x+4=0 \iff 2^x=1 \vee 2^x=4 \iff \boxed{x=0} \vee \boxed{x=2}\ .$$

15. Napisati kanonski oblik parabole $y=x^2-4x+3$.

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=1\cdot\left(x+\frac{-4}{2\cdot 1}\right)^2+\frac{4\cdot 1\cdot 3-(-4)^2}{4\cdot 1}=\boxed{(x-2)^2-1}.$$

Ispitivač: Prof. dr Žarko Popović

R E Š E NJ A

Klasifikacionog ispita iz Matematike za 2012. godinu, MEDVEDjA:

1. Rešiti nejednačinu $(x-1)^2-4<0$.

$(x-1)^2-4<0 \iff (x-1)^2-2^2<0 \iff (x-1-2)(x-1+2)<0 \iff (x-3)(x+1)<0 \iff \boxed{x \in (-1,3)}$.

2. Rešiti jednačinu $(x+1)^2-25=0$.

$(x+1)^2-25=0 \iff (x+1)^2-5^2=0 \iff (x+1-5)(x+1+5)=0 \iff (x-4)(x+6)=0 \iff x-4=0 \vee x+6=0 \iff \boxed{x=4} \vee \boxed{x=-6}$.

3. Izračunati $\left(x^n \cdot x^{\frac{1}{n+1}}\right) : \left(x^{n^2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

$\left(x^n \cdot x^{\frac{1}{n+1}}\right) : \left(x^{n^2}\right)^{\frac{1}{n+1}} = x^{n+\frac{1}{n+1}} : x^{\frac{n^2}{n+1}} = x^{\frac{n^2+n+1}{n+1}-\frac{n^2}{n+1}} = x^{\frac{n^2+n+1-n^2}{n+1}} = x^{\frac{n+1}{n+1}} = \boxed{x}$.

4. Rešiti iracionalnu jednačinu $x-\sqrt{(x+2)(x-7)}=4$.

$x-4=\sqrt{(x+2)(x-7)} \iff (x-4)^2=(x+2)(x-7) \iff x^2-8x+16=x^2-5x-14 \iff -3x=-30 \iff \boxed{x=10}$.

5. Rešiti jednačinu $\dfrac{3x-5}{4}-\dfrac{4-x}{2}=\dfrac{9-2x}{6}$.

$3(3x-5)-6(4-x)=2(9-2x) \iff 9x-15-24+6x=18-4x \iff \boxed{x=3}$.

6. Rešiti sistem jednačina $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{y-1}{4}=4 \ \wedge \ \dfrac{x-2}{3}-\dfrac{y+7}{3}=-2$.

$\frac{x+1}{3}+\frac{y-1}{4}=4 \wedge \frac{x-2}{3}-\frac{y+7}{3}=-2 \iff 4x+4+3y-3=48 \wedge x-2-y-7=-6 \iff 4x+3y=47 \wedge x-y=3 \iff \boxed{x=8} \wedge \boxed{y=5}$.

7. Rešiti jednačinu $4x^4-17x^2+18=0$.

Nakon smene $x^2=y$ dobijamo $4y^2-17y+18=0 \iff y=2 \vee y=\frac{9}{4}$.

Za $y=2$ iz smene dobijamo $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, a za $y=\frac{9}{4}$ dobijamo $x_{3,4}=\pm\frac{3}{2}$.

Dakle, rešenje date jednačine je $\boxed{x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}}$.

8. Odrediti linearnu funkciju $y=f(x)$ tako da je $f(1)=12$ i $f(-5)=0$.

Iz datih uslova i jednačine prave $f(x)=ax+b$, dobijamo

$$12=a\cdot 1+b \quad \wedge \quad 0=a(-5)+b \quad \iff \quad a=2 \quad \wedge \quad b=10.$$

Dakle, tražena linearna funkcija je $\boxed{y=2x+10}$.

9. Rešiti nejednačinu $\dfrac{13}{6} - \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{7-x}{3} > 0$.

$13 - 3(x-3) - 2(7-x) > 0 \iff 13 - 3x + 9 - 14 + 2x > 0 \iff$
$-x + 8 > 0 \iff x < 8 \iff \boxed{x \in (-\infty, 8)}.$

10. Rešiti jednačinu $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2x+1} = 2^{4x}$.

$2^{-3(2x+1)} = 2^{4x} \iff -6x - 3 = 4x \iff -3 = 10x \iff \boxed{x = -\tfrac{3}{10}.}$

11. Izračunati vrednost izraza $I = \log 2 + \log 8 - \dfrac{1}{2}\log 256$.

$I = \log 2 + \log 2^3 - \dfrac{1}{2}\log 2^8 = \log 2 + 3\log 2 - 4\log 2 = \boxed{0}$

12. Rastaviti na faktore polinim $81x^3 - 3$.

$3(27x - 1) = 3(3^3x^3 - 1) = 3((3x)^3 - 1^3) = \boxed{3(3x-1)(9x^2 + 3x + 1)}.$

13. Odrediti oblast definisanosti funkcije $y = \log \dfrac{2x-1}{3+x}$.

$\boxed{D = (-\infty, -3) \cup (1/2, +\infty).}$

14. Za koju vrednost parametra $m \in R$ kvadratna jednačina $x^2 + 6x + m = 0$ ima realna rešenja?

Data jednačina ima realna rešenja ako i samo ako je $D \geq 0$. Kako je

$$D \geq 0 \iff 36 - 4m \geq 0 \iff m \leq 9,$$

dobijamo da data jednačina ima realna rešenja za
$\boxed{m \in (-\infty, 9].}$

15. Odrediti tačke preseka krivih $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 30$ i $g(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$.

Iz uslova preseka krivih dobijamo jednačinu

$$x^3 + 4x^2 + 5x - 30 = x^3 + 2x^2 + 9x + 18 \iff 2x^2 - 4x - 48 = 0$$
$$\iff x^2 - 2x - 24 = 0 \iff x_{1,2} = \tfrac{2 \pm \sqrt{4+96}}{2} \iff x_1 = 6 \vee x_2 = -4.$$

Tačke preseka su $\boxed{A(6, 360)}$ i $\boxed{B(-4, -50)}$.

Ispitivač: Prof. dr Žarko Popović