

BROJNI REDOVI – ZADACI (I DEO)

Posmatrajmo brojni red $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa pozitivnim članovima.

Suma reda $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ je parcijalna suma.

Tražimo $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Ako dobijemo $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (broj) onda red **konvergira**, a ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ ili ne postoji, onda red **divergira**.

Parcijalne sume su u stvari:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

...

Primer 1.

Za dati red $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} + \dots$ odrediti S_n i naći $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Rešenje:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$$

Da bi našli graničnu vrednost, podsetićemo se trika sa rastavljanjem racionalne funkcije koji smo koristili kod integrala.

$$\frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} \dots \dots \dots / * (3n-2) \cdot (3n+1)$$

$$1 = A(3n+1) + B(3n-2)$$

$$1 = 3An + A + 3Bn - 2B$$

$$1 = (3A + 3B)n + A - 2B \dots \dots \dots \textit{uporedjivanje}$$

Podsetite se ovog trika u fajlu integrali zadaci IV deo.

$$3A + 3B = 0$$

$$A - 2B = 1 \dots\dots\dots / *(-3)$$

$$3A + 3B = 0$$

$$-3A + 6B = -3$$

$$9B = -3 \rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{3n-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{3n+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

Sad se vraćamo na zadatak i ovo primenjujemo na svaki sabirak datog reda:

$$S_n = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2}\right) + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \right]$$

$$S_n = \frac{1}{3} \left[1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}} + \dots + \cancel{\frac{1}{3n-5}} - \cancel{\frac{1}{3n-2}} + \cancel{\frac{1}{3n-2}} - \frac{1}{3n+1} \right]$$

$$S_n = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{3n+1} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{3n+1} \right] = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \underbrace{\frac{1}{3n+1}}_{\text{teži } 0} \right] = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{3}}$$

Naravno, trebate obnoviti I granične vrednosti funkcija(nizova) jer nam je to znanje ovde neophodno!

Primer 2.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$

Rešenje:

Ovde nam je posao lak! Važi teorema:

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to jest ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ onda red sigurno ne konvergira.

Dakle, tražimo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2}$ a znamo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$, pa smo sigurni da ovaj niz divergira.

Primer 3.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

Rešenje:

Prvo ćemo ispitati: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{\infty} = 0$. Da li ovo znači da red konvergira? **NE!**

Može konvergirati ili divergirati, ova teorema nam pomaže u situaciji kad ne dobijemo 0 za rešenje, i onda smo sigurni da red divergira. Ovako moramo ispitivati dalje, a ideja je da dokažemo da je suma neograničena, odnosno da je $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$, gde je S_n podniz niza S_n koji je uvek rastući.

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$$

.....itd

$$S_{2^m} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2^m - 1}$$

grupašimo sabirke na sledeći način:

$$S_{2^m} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) \dots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \frac{1}{2^m + 3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2^m - 1}\right)$$

Očigledno je da važi:

$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} > 1$
$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$
.....
$\frac{1}{2^m + 1} + \frac{1}{2^m + 3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2^m - 1} > \frac{2^{m-1}}{2^{m+1}} = \frac{1}{4}$

Kad ovo vratimo gore, dobijamo nejednakost:

$$S_{2^m} > 1 + \frac{m-1}{4}$$

Potražimo ovde graničnu vrednost $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m-1}{4}\right) = \infty$ a to nam govori da niz **divergira!**

Primer 4.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Rešenje:

I ovde je slična situacija kao malopre: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Koristimo sličan trik kao u prethodnom zadatku:

Posmatramo niz parcijalnih suma $S_k, k \in N$ koji je uvek rastući. Njegov podniz $S_{2^m}, m \in N$ je:

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

.....itd

$$S_{2^m} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m}$$

Grupišemo članove ali tako da možemo zaključiti od čega su veći:

$$S_{2^m} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)$$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ <p>.....</p> $\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m} > \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}$
--

Ako vratimo ove nejednakosti gore, dobijamo:

$$S_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$$

I ovde je $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{2}\right) = \infty$, a to opet govori da dati red divergira.

Košijev (Cauchyev) kriterijum

Potreban i dovoljan uslov da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira jeste da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N = N(\varepsilon)$

tako da za $n > 0 \wedge p > 0$ važi: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

Primer 5.

Koristeći Košijev kriterijum dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Rešenje:

U prethodnom primeru smo dokazali da ovaj red divergira. Sad nam je posao da to dokažemo preko Košijevog kriterijuma.

Uzmimo da je $p = n$. Onda imamo:

$$|S_{n+n} - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Kako je :

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{n+3} > \frac{1}{2n}$$

.....

Ovo vratimo gore i dobijamo:

$$|S_{n+n} - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Da smo na početku uzeli da je, recimo, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ a radom smo dobili da je $\varepsilon > \frac{1}{2}$, možemo zaključiti da red divergira.

Primer 6.

Koristeći Košijev kriterijum dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ divergira.

Rešenje:

Uzmimo, slično kao malopre da je $\varepsilon = \frac{1}{4}$ i uzmimo da je $p = n$

$$|S_{n+n} - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}$$

Sad razmišljamo:

$$(n+1)(n+2) < (n+2)^2 \rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} > \frac{1}{(n+2)^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+2)^2}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} > \frac{1}{n+2}}$$

$$(n+2)(n+3) < (n+3)^2 \rightarrow \frac{1}{(n+2)(n+3)} > \frac{1}{(n+3)^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+3)^2}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} > \frac{1}{n+3}}$$

.....

I tako dalje.

Imamo:

$$\begin{aligned} |S_{n+n} - S_n| = |S_{2n} - S_n| &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} > \\ &> \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dokazali smo da ovaj red divergira.

Poredbeni kriterijum :

Važi za dva reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

i) Ako je $a_n < b_n$ onda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentan

ii) Ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ onda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentan

iii) Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = M$, ($M \neq 0$) M je konačan broj onda redovi istovremeno konvergiraju ili divergiraju

Ovde se najčešće za upoređivanje koristi red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$; ovaj red za $k > 1$ konvergira, a za $k \leq 1$ divergira

Primer 7.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

Rešenje:

Razmišljamo:

$2n-1 > n$ počevši od $n=2$, pa je onda

$$\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{n}$$

Kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentan, to je divergentan i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ po poredbenom kriterijumu.

[Ako je $a_n < b_n$ onda a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan]

Neki profesori rade ovo direktno:

$$\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n} \text{ kad } n \rightarrow \infty$$

Onda je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, pa zaključujemo da dati red divergira.

Primer 8.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

Rešenje:

Mi ćemo upotrebljavati onaj brži način, a vi naravno radite kako vaš profesor zahteva...

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n(n+1)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{n^1 \cdot n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ kad } n \rightarrow \infty.$$

Oznaka \sim nam znači da se ovi izrazi ponašaju slično kad $n \rightarrow \infty$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira pa konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

Naravno, mogli smo koristiti i poredbeni kriterijum, gde bi uzimali red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ za upoređivanje.

Primer 9.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

Rešenje:

Ovde ćemo izvršiti najpre racionalizaciju:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt[3]{n} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{n} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \end{aligned}$$

Sad razmišljamo:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot (\sqrt{n} + \sqrt{n})} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}} \cdot 2n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2n^{\frac{5}{6}}} \text{ kad } n \rightarrow \infty$$

Dakle, posmatramo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$, koji divergira, a onda divergira i početni red, jer

ovde se najčešće za upoređivanje koristi red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$; ovaj red za $k > 1$ konvergira, a za $k \leq 1$ divergira

Primer 10.

Ispitati konvergenciju reda: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{n}$

Rešenje:

Ovde ćemo iskoristiti da je $\sin \frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha}{n}$ kad $n \rightarrow \infty$

Onda imamo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n} = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a znamo da ovaj red divergira, pa divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{n}$.

Primer 11.

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$

Rešenje:

Kad $n \rightarrow \infty$ već smo videli da je $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ i $\sqrt{n^2+1} \sim \sqrt{n^2} \sim n$, zato imamo:

$$\frac{n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergira, pa divergira i red } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}.$$

U sledećem fajlu nastavljamo sa kriterijumima za konvergenciju...

