# Metoda neodredjenih koeficijenata

Pisali ste nam da vam ova metoda nije baš najjasnija , u smislu kako izabrati funkciju za partikularno rešenje.

Pokušaćemo u ovom fajlu da vam na nekoliko primera objasnimo to.

Da se podsetimo:

**$y``+a_1y`+a_2y = f(x)$ je nehomogena diferencijalna jednačina II reda sa konstantnim koeficijentima.**

**Najpre tražimo rešenje homogene jednačine:**

**$y``+a_1y`+a_2y = 0$**

Karakteristična jednačina je $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

U zavisnosti od rešenja karakteristične jednačine razlikujemo tri slučaja:

1) $\lambda_1$ i $\lambda_2$ su realna i različita, onda je : $y(x)=c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$

2) $\lambda_1$ i $\lambda_2$ su realna i jednaka rešenja , onda je : $y(x)= c_1e^{\lambda_1 x} + x c_2e^{\lambda_2 x}$

3) $\lambda_1$ i $\lambda_2$ su konjugovano kompleksni brojevi : $\lambda_1$ =a+bi, $\lambda_2$ =a-bi , onda je :

$$y(x)=c_1e^{ax}\cos bx+c_2e^{ax}\sin bx$$

Sad rešenje zapisujemo : $y = y_h + y_p$

$y_h$ je rešenje homogene jednačine, a $y_p$ je rešenje koje tražimo metodom neodredjenih koeficijenata u zavisnosti od f(x).

**Ako je $f(x)= e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx]$**

**1) Ako a $\pm$bi nisu koreni karakteristične jednačine:**

**$y_p = e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$ gde je N=max(n,k)**

**2) Ako su a $\pm$bi koreni karakteristične jednačine:**

**$y_p = x^m e^{ax}[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx]$ , gde je m- reda a $\pm$bi**

**Primer 1.**

**Rešiti diferencijalnu jednačinu** $y``-y=e^{2x}$ **.**

**Rešenje:**

Homogena jednačina je $y``-y=0$ , pa je karakteristična jednačina:

$$y``-y=0$$
$$\lambda^2-1=0\rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=1$$

Rešenje odgovarajuće homogene d.j. je onda :

$$y_h=C_1e^{-x}+C_2e^x$$

Znamo da je $y=y_h+y_p$ i sledeći posao nam je da nadjemo $y_p$

Naša funkcija je f(x) = $e^{2x}$.

Po formuli je $f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx]$ , pa će za našu funkciju biti:

$$e^{2x}=e^{2x}[0\cdot\cos\left(0\cdot x\right)+0\cdot\sin\left(0\cdot x\right)]\rightarrow e^{\overset{\text{ovo je a}}{\boxed{2}}x}[0\cdot\cos\left(\overset{\text{ovo je b}}{\boxed{0}}\cdot x\right)+0\cdot\sin\left(\overset{\text{ovo je b}}{\boxed{0}}\cdot x\right)]\rightarrow a=2\wedge b=0$$

Sad ispitujemo koliko je $a+bi=2+0\cdot i=2$ .

Ovo uporedjujemo sa rešenjima karakteristične jednačine, a kako su ona -1 i 1, vidimo da nisu ista, pa nam **ne** treba x ili $x^2$ ispred.

Zaključujemo da je partikularno rešenje oblika:

$$y_p=Ae^{2x}\rightarrow \text{gde je A broj koji ćemo tražiti.}$$
$$y_p`=2Ae^{2x}$$
$$y_p``=2\cdot 2Ae^{2x}=4Ae^{2x}$$

Ovo zamenjujemo u zadatu jednačinu:

$$y``-y=e^{2x}$$
$$4Ae^{2x}-Ae^{2x}=e^{2x}$$
$$3Ae^{2x}=e^{2x}\rightarrow 3A=1\rightarrow A=\frac{1}{3}\rightarrow\boxed{y_p=\frac{1}{3}e^{2x}}$$

**Konačno rešenje je:** $y=y_h+y_p\rightarrow\boxed{y=C_1e^{-x}+C_2e^x+\frac{1}{3}e^{2x}}$

**Primer 2.**

**Rešiti diferencijalnu jednačinu** $y``-2y`=x$ **.**

**Rešenje:**

Rešimo najpre homogenu :

$$y``-2y`=0$$
$$\lambda^2-2\lambda=0\rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=2$$

Rešenje odgovarajuće homogene d.j. je onda :

$$y_h=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{2x}\rightarrow y_h=C_1+C_2e^{2x}$$

Naša funkcija je f(x) = x.

$$f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx]$$
$$x=e^{0\cdot x}[x\cos(0\cdot x)+0\cdot\sin(0\cdot x)]\rightarrow e^{\boxed{0}\cdot x}[x\cos(\boxed{0}\cdot x)+0\cdot\sin(\boxed{0}\cdot x)]\rightarrow a=0,b=0$$

Onda je $a+bi=0+0\cdot i=0$.

Kad ovo uporedimo sa rešenjima karakteristične jednačine, koja su 0 i 2, vidimo da je jedno isto!

E to nam govori da moramo da stavimo jedno x ispred rešenja koje je u obliku polinoma I stepena: Ax+B, gde su A i B brojevi koje tražimo.

Dakle:

$$y_p=x(Ax+B)$$
$$y_p=Ax^2+Bx$$
$$y_p`=2Ax+B$$
$$y_p``=2A$$

Zamenimo ovo u zadatu d.j.

$$y``-2y`=x$$
$$2A-2(2Ax+B)=x$$
$$2A-4Ax-2B=x$$
$$-4Ax+2A-2B=x\rightarrow\text{sad vršimo uporedjivanje}$$
$$-4A=1$$
$$\underline{2A-2B=0}$$
$$A=B=-\frac{1}{4}$$

**Dobili smo partikularno rešenje:**

$$y_p = Ax^2 + Bx \rightarrow \boxed{y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x}$$

**Konačno rešenje je:**

$$y = y_h + y_p \rightarrow \boxed{y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x}$$

**Primer 3.**

**Rešiti diferencijalnu jednačinu** $y`` + 2y` + y = e^{-x}$ **.**

**Rešenje:**

$$y`` + 2y` + y = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Rešenje odgovarajuće homogene d.j. je onda :

$$y_h = C_1 e^{-1\cdot x} + C_2 x e^{-1\cdot x} \rightarrow y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Naša funkcija je f(x) = $e^{-x}$.

$$f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_k(x)\sin bx]$$
$$e^{-x} = e^{=1\cdot x}[0\cdot\cos(0\cdot x) + 0\cdot\sin(0\cdot x)] \rightarrow e^{\boxed{=1}\cdot x}[0\cdot\cos(0\cdot x) + 0\cdot\sin(0\cdot x)] \rightarrow a = -1, b = 0$$

Onda je $a + bi = -1 + 0\cdot i = -1$.

Evo situacije kad karakteristična jednačina ima dvostruku nulu -1, a to je takodje i resenje našeg izraza a+bi.

U takvoj situaciji moramo dodati $x^2$.

$$y_p = Ax^2 e^{-x} \rightarrow \text{ A broj koji ćemo tražiti ,pazite , mora izvod proizvoda}$$
$$y_p` = A(2xe^{-x} - x^2 e^{-x})$$
$$y_p`` = A(2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}) = A(2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2 e^{-x})$$

Da bi nam bilo lakše, možemo sve pomnožiti:

$$y_p = Ax^2 e^{-x}$$
$$y_p` = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}$$
$$y_p`` = 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}$$

Menjamo u zadatu jednačinu:

$$y``+2y`+y=e^{-x}$$
$$2Ae^{-x}-4Axe^{-x}+Ax^2e^{-x}+2(2Axe^{-x}-Ax^2e^{-x})+Ax^2e^{-x}=e^{-x}$$
$$2Ae^{-x}\cancel{-4Axe^{-x}}\cancel{+Ax^2e^{-x}}\cancel{+4Axe^{-x}}\cancel{-2Ax^2e^{-x}}+\cancel{Ax^2e^{-x}}=e^{-x}$$
$$2Ae^{-x}=e^{-x}\rightarrow 2A=1\rightarrow A=\frac{1}{2}\rightarrow \boxed{y_p=\frac{1}{2}x^2e^{-x}}$$

Konačno rešenje je onda :

$$y=y_h+y_p\rightarrow \boxed{y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}}$$

**Primer 4.**

**Rešiti diferencijalnu jednačinu** $y``-2y`=x+\sin 2x$ **.**

**Rešenje:**

Homogena:

$$y``-2y`=0$$
$$\lambda^2-2\lambda=0\rightarrow \lambda_1=0,\lambda_2=2$$

Rešenje odgovarajuće homogene d.j. je onda :

$$y_h=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{2x}\rightarrow y_h=C_1+C_2e^{2x}$$

Kako našu funkciju x+sin2x ne možemo napisati u obliku koji znamo, uradićemo sledeće:

Opšte rešenje ćemo tražiti kao:

$y=y_h+y_{p1}+y_{p2}$ gde su :

$y_{p1}\rightarrow$ partikularno rešenje jednačine $y``-2y`=x$

$y_{p2}\rightarrow$ partikularno rešenje jednačine $y``-2y`=\sin 2x$

Dakle, tražimo najpre rešenje za $y``-2y`=x$

Taj zadatak smo rešavali u **primeru 2**. pa ćemo iskoristiti to rešenje:

$$\boxed{y_{p1}=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x}$$

Sad rešavamo $y``-2y`=\sin 2x$

Naša funkcija je f(x) = sin2x.

$$f(x)=e^{ax}[P_n(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx]$$
$$\sin 2x=e^{0\cdot x}[0\cdot\cos 2x+1\cdot\sin 2x]\to e^{\boxed{0}\cdot x}[0\cdot\cos\left(\boxed{2}\cdot x\right)+1\cdot\sin\left(2\cdot x\right)]\to a=0,b=2$$

Onda je $a+bi=0+2\cdot i=2i$. Vidimo da ovo rešenje nema veze sa rešenjima karakteristične jednačine, koja su 0 i 2.

Partikularno rešenje tražimo u obliku:

$$y_{p2}=A\sin 2x+B\cos 2x$$
$$Izvodi:$$
$$y_{p2}`=2A\cos 2x-2B\sin 2x$$
$$y_{p2}``=-4A\sin 2x-4B\cos 2x$$
$$\text{Vraćamo se na početnu jednačinu:}$$
$$y``-2y`=\sin 2x$$
$$-4A\sin 2x-4B\cos 2x-2\left(2A\cos 2x-2B\sin 2x\right)=\sin 2x$$
$$-4A\sin 2x-4B\cos 2x-4A\cos 2x+4B\sin 2x=\sin 2x$$
$$(-4A+4B)\sin 2x+(-4A-4B)\cos 2x=\sin 2x\to uporedjujemo$$
$$-4A+4B=1$$
$$\underline{-4A-4B=0}$$
$$A=-\frac{1}{8}\to B=\frac{1}{8}$$
$$y_{p2}=A\sin 2x+B\cos 2x\to\boxed{y_{p2}=-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x}$$

Konačno rešenje je:

$$y=y_h+y_{p1}+y_{p2}$$
$$\boxed{y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x}$$