DIFERENCIJALNE JEDNAČINE II REDA – ZADACI

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $\quad$ **y``= x + sinx**

Rešenje:

y``= x + sinx $\qquad$ uzećemo smenu y`= p , odakle je y``= p`

p` = x + sinx

$\frac{dp}{dx}$ = x+sinx

dp = (x+sinx)dx $\qquad$ ovo je d.j. koja razdvaja promenljive

$$\int dp = \int (x + \sin x)dx$$

p = $\frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$ $\qquad$ dodali smo konstantu c_1 jer smo rešili jedan integral

y`= $\frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

dy = ($\frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$)dx

$\int dy = \int (\frac{1}{2}x^2 - \cos x + c_1)dx$ $\quad$ svaki integral na desnoj strani rešavamo posebno

$y = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \sin x + c_1 x + c_2$ $\qquad$ dodamo konstantu c_2

$y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1 x + c_2$ $\qquad$ ovo je opšti integral

2. Nađi opšti integral jednačine $y'' + 2yy'^3=0$

Rešenje:

$y''+ 2yy'^3=0$ uzećemo smenu $y'= p$, odakle je $y''= p'p$,(pogledaj teorijske napomene)

$p'p + 2y\, p^3 = 0$ izvučemo p kao zajednički

$p(p'+ 2yp^2) = 0$ odavde je $p = 0$ ili $p'+ 2yp^2 = 0$

Za $p= 0$ odmah dobijamo rešenje $y' = 0$ to jest $y = c$ (konstanta)

$p'+ 2yp^2 = 0$

$$\frac{dp}{dy} = -2yp^2$$

$$\frac{dp}{p^2} = -2ydy$$ d.j. koja razdvaja promenljive, integralimo

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int -2ydy$$

$$-\frac{1}{p} = -2\frac{y^2}{2} + c_1$$

$$\frac{1}{p} = y^2 - c_1$$

$$p = \frac{1}{y^2 - c_1}$$ vratimo $y' = p$

$$y' = \frac{1}{y^2 - c_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - c_1}$$

$(y^2 - c_1)dy = dx$

$$\frac{y^3}{3} - c_1 y = x + c_2$$ opšti integral

Dakle, rešenja su: $y = c$ i $\frac{y^3}{3} - c_1 y = x + c_2$

3. Nađi opšti integral jednačina:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$
b) $y'' - 2y + y = 0$
c) $y'' - 2y' + 2y = 0$
d) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$

Rešenje:

PAZI : U KARAKTERISTIČNOJ JEDNAČINI NEKO UZIMA KAO SMENU p, NEKO r, A NEKO λ.

VI RADITE ONAKO KAKO RADI VAŠ PROFESOR!(u suštini je sve jedno)

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ najpre rešimo karakterističnu jednačinu(pogledaj teoriju)

$p^2 - 3p + 2 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow p_1 = 2, p_2 = 1$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

b) $y'' - 2y + y = 0$ najpre rešimo karakterističnu jednačinu

$p^2 - 2p + 1 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = 1$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

$p^2 - 2p + 2 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} \Rightarrow p_1 = 1 + i, p_2 = 1 - i$$

$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$ (opet pogledaj teorijske napomene)

d) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$

$p^4 - 5p^2 + 4 = 0$ (ovo je bikvadratna jednačina) $p^2 = t$ je smena

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = 1$ vratimo smenu $p^2 = t$

$p^2 = 4$ ili $p^2 = 1$, pa je $p_1 = 2$, $p_2 = -2$, $p_3 = 1$, $p_4 = -1$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$$

4. Naći opšti integral jednačine : $\mathbf{y`` - y = x^2 + 1}$

Rešenje:

Najpre nađemo rešenje odgovarajuće homogene jednačine!

$$y`` - y = 0$$

$$p^2 - 1 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{0 \pm 2}{2} \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = -1$$

$$y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Dalje možemo birati dva puta: metodu neodređenih koeficijenata ili metodu varijacije konstanti.

Ovde bi bilo dobro da se podsetite teorije, da bi izabrali lakši put.....

Mi ćemo koristiti metodu neodređenih koeficijenata u ovom slučaju.

$\mathbf{Y = ax^2 + bx + c}$ gde su a,b,c traženi koeficijenti

$Y` = 2ax + b$

$Y`` = 2a$

Ovo zamenimo u datu d.j. $y`` - y = x^2 + 1$

$$2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

$$2a - ax^2 - bx - c = x^2 + 1$$

$$-ax^2 - bx + (2a - c) = x^2 + 1$$

Sad vršimo upoređivanje koeficijenata, uz x^2, pa uz x, pa slobodne članove

$$\left.\begin{aligned} -a &= 1 \\ -b &= 0 \\ 2a - c &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Odavde je a = -1, b = 0 i c = -3 , pa to zamenimo u $\mathbf{Y = ax^2 + bx + c}$ i dobijemo:

$Y = -x^2 - 3$ pa će konačno rešenje biti :

$y = y_H + Y$ to jest $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x^2 - 3$

5. Rešiti diferencijalnu jednačinu : $y`` - y` = \frac{1}{1+e^x}$

Rešenje:

Nađemo rešenje odgovarajuće homogene jednačine.

$y`` - y` = 0$

$p^2 - p = 0$

$p_{1,2} = \frac{1 \pm 1}{2} \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = 1$

Znači da je rešenje homogene d.j. $y_H = c_1 + c_2 e^x$

Dalje ćemo nastaviti metodom varijacije konstanata (pogledaj malo teoriju)

$c_1 = c_1(x)$ i $c_2 = c_2(x)$ postavimo sistem:

$$\left.\begin{aligned} c`_1 + c`_2 e^x &= 0 \\ 0c`_1 + c`_2 e^x &= \frac{1}{1+e^x} \end{aligned}\right\}$$ Iz druge jednačine izrazimo c_2

$c_2` = \frac{1}{e^x(1+e^x)}$ integralimo

$c_2 = \int \frac{1}{e^x(1+e^x)} dx$ **U ovom integralu ćemo kao trik dodati i gore i dole e^x**

$\int \frac{1}{e^x(1+e^x)} dx = \int \frac{1e^x}{e^x e^x(1+e^x)} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^x)} dx$ uzimamo smenu $\left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right|$ pa je

$\int \frac{e^x}{e^{2x}(1+e^x)} dx = \int \frac{dt}{t^2(1+t)}$ ovaj integral radimo kao racionalnu funkciju!

$$\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{(1+t)}$$

$1 = At(t+1) + B(t+1) + C t^2$

$1 = At^2 + At + Bt + B + C t^2$ sad grupišemo članove

$1 = t^2(A+C) + t(A+B) + B$ ovde uporedjujemo i pravimo sistem

$A+C = 0$

$A+B = 0$

$B = 1$ odavde je $A = -1$ i $C = 1$

Vratimo se :

$$\frac{1}{t^2(1+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{(1+t)}=\frac{-1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(1+t)}$$

$$\int\frac{dt}{t^2(1+t)}=\int\left(\frac{-1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(1+t)}\right)dt=-\ln|t|-\frac{1}{t}+\ln|t+1| \quad \text{vratimo smenu } t=e^x$$

$$=-\ln e^x-\frac{1}{e^x}+\ln(e^x+1)$$

$$=-x-\frac{1}{e^x}+\ln(e^x+1)+d_2 \quad (d_2 \text{ je konstanta})$$

Dakle , dobili smo $c_2(x)=-x-\frac{1}{e^x}+\ln(e^x+1)+d_2$

Sad da nadjemo $c_1=c_1(x)$

$$c`_1+c`_2e^x=0$$

$$c`_1=-c`_2e^x=-\frac{1}{e^x(1+e^x)}e^x=-\frac{1}{1+e^x} \quad \text{integralimo}$$

$$c_1=\int -\frac{1}{1+e^x}dx=-\int\frac{1}{1+e^x}dx$$

Slično kao malopre i gore i dole dodamo e^x i uzimamo istu smenu $e^x=t$ i dobijamo

$c_1(x)=\ln(1+e^x)-x+d_1$

Dakle, dobili smo :

$$\left.\begin{array}{l} c_1(x)=\ln(1+e^x)-x+d_1 \\ c_2(x)=-x-\frac{1}{e^x}+\ln(e^x+1)+d_2 \end{array}\right\} \quad \text{Ovo vratimo u homogeno rešenje:}$$

$$y_H=c_1+c_2e^x$$

$$y=\ln(1+e^x)-x+d_1+\left(-x-\frac{1}{e^x}+\ln(e^x+1)+d_2\right)e^x$$

$$y=\ln(1+e^x)-x+d_1-xe^x-1+e^x\ln(e^x+1)+d_2e^x$$

$y=d_1+d_2e^x-x-xe^x-1+\ln(1+e^x)+e^x\ln(e^x+1)$ ovo je opšte rešenje (integral)

6. Rešiti diferencijalnu jednačinu : y`` - 2y` +2y = e^x sinx

Rešenje:

y`` - 2y` +2y =0

$p^2 - 2p + 2 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} \Rightarrow p_1 = 1 + i, p_2 = 1 - i$$

$$y_H = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

Variramo konstante: $c_1 = c_1(x)$ i $c_2 = c_2(x)$

$$\begin{aligned} &c`_1 e^x \cos x + c`_2 e^x \sin x = 0 \\ &c`_1 (e^x \cos x - e^x \sin x) + c`_2 (e^x \sin x + e^x \cos x) = \sin x \end{aligned}$$

Pazi $e^x \cos x \wedge e^x \sin x$ **mora kao izvod proizvoda!**

$$\begin{aligned} &c`_1 \cos x + c`_2 \sin x = 0 \\ &c`_1 (\cos x - \sin x) + c`_2 (\sin x + \cos x) = \sin x \end{aligned}$$

sve smo podelili sa e^x

$$c`_2 = -c`_1 \frac{\cos x}{\sin x}$$

izrazili smo c`$_2$ i to zamenimo u drugu jednačinu

$$c`_1 (\cos x - \sin x) - c`_1 \frac{\cos x}{\sin x} (\sin x + \cos x) = \sin x$$

sredimo i izrazimo $c`_1$, to je ideja!

$$c`_1 (\cos x - \sin x) - c`_1 (\cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}) = \sin x$$

$$c`_1 (\cos x - \sin x - \cos x - \frac{\cos^2 x}{\sin x}) = \sin x$$

$$c`_1 (-\sin x - \frac{\cos^2 x}{\sin x}) = \sin x$$

sve pomnožimo sa - sin x

$$c`_1 (\sin^2 x + \cos^2 x) = -\sin^2 x$$

pazi, važi da je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$c`_1 = -\sin^2 x$$

integralimo i iskoristimo $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$c_1 = -\int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + d_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + d_1$$

nađimo sada i c_2

važi da je :

$c`_2 = -c`_1 \frac{\cos x}{\sin x}$ i $c`_1 = -\sin^2 x$ pa je $c`_2 = \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} = \sin x \cos x$

$c`_2 = \sin x \cos x$ integralimo

$c_2 = \int \sin x \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2} + d_2$ dakle

$c_2 = \frac{\sin^2 x}{2} + d_2$

Vratimo $c_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + d_1$ i $c_2 = \frac{\sin^2 x}{2} + d_2$ u $y_H = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

$y = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + d_1)\ e^x \cos x + (\frac{\sin^2 x}{2} + d_2)\ e^x \sin x$ konačno rešenje

Možete sve da pomnožite a može da ostane i ovako , kako kaže Vaš profa.

7. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine : $x^2y``-xy`+y = 2x$

koje zadovoljava početne uslove y(1)= 0 i y`(1)= 1

Rešenje:

Ovo je Ojlerova jednačina (pogledaj malo teorijske napomene)

Uvodimo smenu $x=e^t$, odavde je: $y` = \frac{y`_t}{e^t}$; $y`` = \frac{y_t`` - y_t`}{e^{2t}}$;

$x^2y``-xy`+y = 2x$

$e^{2t}\frac{y_t^{``} - y_t^{`}}{e^{2t}} - e^t \frac{y_t^{`}}{e^t} + y_t = 2e^t$ skratimo…

$y_t^{``} - y_t^{`} - y_t^{`} + y_t = 2e^t$

$y_t^{``} - 2y_t^{`} + y_t = 2e^t$ ovo je nehomogena linearna d.j.

$y_t^{``} - 2y_t^{`} + y_t = 0$

$p^2 - 2p + 1 = 0$

$p_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = 1$

$y_t(H) = c_1 e^t + c_2 te^t$ sada variramo konstante…

$c`_1 e^t + c`_2 te^t = 0$

$\underline{c`_1 e^t + c`_2 (e^t + te^t) = 2e^t}$ obe jednačine podelimo sa e^t

$c`_1 + c`_2 t = 0$

$\underline{c`_1 + c`_2 (1+t) = 2}$

$c`_1 = -c`_2 t$ izrazili smo jednu nepoznatu i zamenimo u drugu jednačinu

$-c`_2 t + c`_2 (1+t) = 2$

$c`_2 = 2$ integralimo

$c_2 = \int 2dt = 2t + d_2$

$c_2 = 2t + d_2$ **našli smo jedno rešenje**

$c`_1 = -c`_2 t = -2t$ integralimo

$c_1 = -2\int tdt = -2\frac{t^2}{2} + d_1 = -t^2 + d_1$

$c_1 = -t^2 + d_1$ **našli smo drugo rešenje**

Vratimo se u homogeno rešenje:

$y_t(H) = c_1 e^t + c_2 te^t$

$y_t = (-t^2 + d_1) e^t + (2t + d_2) te^t$ pomnožimo i sredimo..

$y_t = d_1 e^t + d_2 te^t + t^2 e^t$ ovo je konačno rešenje po t, vratimo smenu **$x=e^t$, to jest t=lnx**

$y = d_1 x + d_2 x\ln x + x\ln^2 x$ **ovo je konačno rešenje po x**

Nađimo sada traženo partikularno rešenje:(prvo izvod rešenja)

$y = d_1 x + d_2 x\ln x + x\ln^2 x$ ovde menjamo **y(1)= 0**

$y` = d_1 + d_2(\ln x + 1) + \ln^2 x + 2\ln x$ ovde menjamo **y`(1)= 1**

$0 = d_1 1 + d_2 1\ln 1 + 1\ln^2 1$ (pazi ln1=0)

$1 = d_1 + d_2(\ln 1 + 1) + \ln^2 1 + 2\ln 1$

$0 = d_1 1 \Rightarrow d_1 = 0$

$1 = d_1 + d_2 \Rightarrow d_2 = 1$ vratimo konstante u rešenje:

$y = 0x + 1x\ln x + x\ln^2 x$

$y = x\ln x + x\ln^2 x$ **ovo je traženo partikularno rečenje**

8. Rešiti diferencijalnu jednačinu : $(x-1)^2y`` - 2(x-1)y` + 2y = (x-1)^2$

Rešenje: Ovo je takođe Ojlerova jednačina, smena je $x - 1 = e^t$, pa je $y` = \frac{y`_t}{e^t}$; $y`` = \frac{y_t`` - y_t`}{e^{2t}}$

$(x-1)^2y`` - 2(x-1)y` + 2y = (x-1)^2$

$$e^{2t}\frac{y_t^{``} - y_t^{`}}{e^{2t}} - 2e^t\frac{y_t^{`}}{e^t} + 2y_t = e^{2t}$$

$$y_t^{``} - y_t^{`} - 2y_t^{`} + 2y_t = e^{2t}$$

$y_t^{``} - 3y_t^{`} + 2y_t = e^{2t}$ prvo rešavamo odgovarajuću homogenu jednačinu:

$$y_t^{``} - 3y_t^{`} + 2y_t = 0$$

$p^2 - 3p + 2 = 0$

$$p_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow p_1 = 2, p_2 = 1$$

$y_t(H) = c_1e^t + c_2e^{2t}$ variramo konstante $c_1=c_1(t)$ i $c_2=c_2(t)$

$c`_1e^t + c`_2e^{2t} = 0$ sve podelimo sa e^t

$c`_1e^t + 2c`_2e^{2t} = e^{2t}$

$c`_1 + c`_2e^t = 0$ pomnožimo ovu jednačinu sa -1

$c`_1 + 2c`_2e^t = e^t$

$-c`_1 - c`_2e^t = 0$

$c`_1 + 2c`_2e^t = e^t$

$c_2^{`}e^t = e^t$

$c_2^{`} = 1$ integralimo

$c_2 = \int 1dt$ pa je $c_2 = t + d_2$ jedno rešenje

$c`_1 + c`_2e^t = 0$

$c`_1 = -c`_2e^t$ pa je $c`_1 = -e^t$ i kad integralimo $c_1 = -e^t + d_1$

Našli smo dakle vrednosti : $c_2 = t + d_2$ i $c_1 = -e^t + d_1$ koje ćemo vratiti u homogeno rešenje:

$y_t(H) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$

$y_t = (-e^t + d_1)e^t + (t + d_2)e^{2t}$

$y_t = -e^{2t} + d_1 e^t + te^t + d_2 e^{2t}$

$y_t = d_1 e^t + d_2 e^{2t} + te^{2t} - e^{2t}$ ovo je rešenje po t, vratimo smenu $\mathbf{x - 1 = e^t}$ **to jest** $\mathbf{t = \ln(x-1)}$

$y = d_1(x-1) + d_2(x-1)^2 + (x-1)^2 \ln(x-1) - (x-1)^2$ ovo je opšte rešenje

9. Rešiti diferencijalnu jednačinu : xy``-(x+1)y`+ y = 0 ako je poznato jedno partikularno rešenje $\mathbf{y_1 = e^x}$

Rešenje:

xy``-(x+1)y`+ y = 0 podelimo sve sa x

$y`` - \frac{x+1}{x} y` + \frac{1}{x} y = 0$

Da vas podsetimo malo teorije:

JEDNAČINA OBLIKA y``+ a(x)y`+b(x)y=f(x)

Posmatramo odgovarajuću homogenu jednačinu : y``+ a(x)y`+b(x)y=0
Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1(x)$ ove jednačine onda je drugo rešenje:

$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$, pa je rešenje homogene jednačine $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$
Nadalje variramo konstante da bi našli rešenje odgovarajuće početne nehomogene jednačine.

Mi imamo homogenu jednačinu, pa ne moramo da variramo konstante!

a(x)= $-\frac{x+1}{x}$ i b(x) = $\frac{1}{x}$

$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$

$-\int a(x)dx = \int \frac{x+1}{x} dx = \int (\frac{x}{x} + \frac{1}{x}) dx = x + \ln x$

$y_2(x) = e^x \int \frac{e^{x+\ln x}}{e^{2x}} dx = e^x \int \frac{e^x e^{\ln x}}{e^{2x}} dx = e^x \int \frac{x}{e^x} dx = \begin{vmatrix} x = u & e^{-x} dx = dv \\ dx = du & -e^{-x} = v \end{vmatrix} = e^x(-xe^{-x} - e^{-x}) = -x - 1$

$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$

$y(x) = c_1\, e^x + c_2\,(-x-1)$ je konačno rešenje