VIŠESTRUKI INTEGRALI - ZADACI (IV DEO)

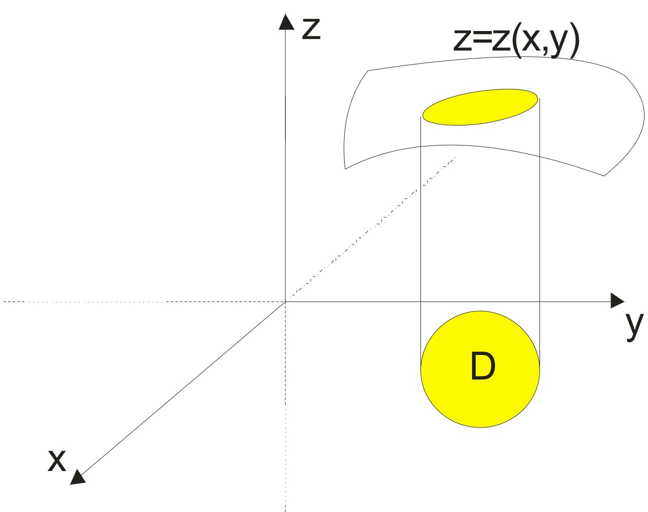
IZRAČUNAVANJE ZAPREMINE PRIMENOM DVOJNOG INTEGRALA

Pre nego li krenete sa proučavanjem ovog fajla, obavezno pogledajte fajl "NEKE POVRŠI U R^3" iz više matematike. U većini zadataka ovde je neophodno nacrtati sliku u prostoru, a zatim kad nadjemo presek, spustimo problem u ravan da bi odredili granice.

Da se podsetimo teorijskog dela:

Zapremina cilindra, koji odozgo ograničava neprekidna površ definisana jednačinom z=z(x,y), odozdo ravan z=0 , a sa strane prava cilindrična površ, koja u ravni xOy iseca neku oblast D, data je formulom:

$$\mathbf{V} = \iint_D z(x,y)dxdy$$



Dakle, dvostruki integral izračunava zapreminu tela ISPOD date površi u odredjenim granicama.

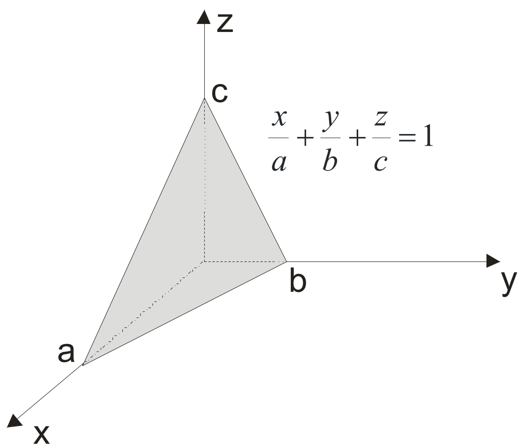
Evo nekoliko primera:

Primer 1.

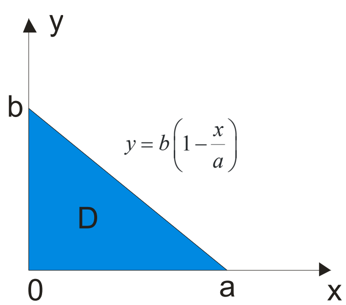
Naći zapreminu tela ograničenog sa ravni $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ i $x=0$, $y=0$, $z=0$

Rešenje:

Nacrtajmo najpre sliku u prostoru:



Sada problem spustimo 'spustimo' u ravan xOy (to jest z=0) i dobijemo:



Odavde odredjujemo granice!

Jasno je da x ide od 0 do a.

Odredimo pravu kroz a i b, jer z prvo udara na x= 0, pa onda na tu pravu:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \to \frac{y}{b}=1-\frac{x}{a} \to y=b\left(1-\frac{x}{a}\right) \to \boxed{0 \le y \le b\left(1-\frac{x}{a}\right)}$$

Dobijamo $D:\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b\left(1-\frac{x}{a}\right) \end{cases}$

Sad računamo zapreminu pomoću malopre navedene formule:

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})dy$$

Rešimo najpre:

$$\int c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})dy=c(y-\frac{x}{a}y-\frac{y^2}{2b})$$

$$c(y-\frac{x}{a}y-\frac{y^2}{2b})\Bigg|_0^{b(1-\frac{x}{a})}=c\left(b(1-\frac{x}{a})-\frac{x}{a}b(1-\frac{x}{a})-\frac{[b(1-\frac{x}{a})]^2}{2b}\right)=$$

$$c\left(b-\frac{bx}{a}-\frac{bx}{a}+\frac{bx^2}{a^2}-\frac{b^2(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2})}{2b}\right)=c\left(b-\frac{2bx}{a}+\frac{bx^2}{a^2}-\frac{b}{2}+\frac{bx}{a}-\frac{bx^2}{2a^2}\right)=$$

$$c\left(\frac{b}{2}-\frac{2bx}{2a}+\frac{bx^2}{2a^2}\right)=\frac{cb}{2}\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)$$

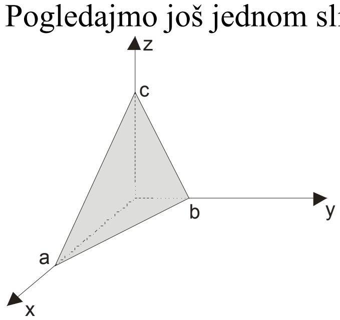
Vratimo se u računanje integrala:

$$V=\iint_D z(x,y)dxdy=\int_0^a\frac{cb}{2}\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$=\frac{cb}{2}\left(x-\frac{2x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{cb}{2}\left(a-\frac{a^2}{a}+\frac{a^3}{3a^2}\right)=\frac{cb}{2}\cdot\frac{a}{3}=\boxed{\frac{abc}{6}}$$

Zapremina koju smo dobili je ustvari zapremina trostrane piramide !

Pogledajmo još jednom sliku:



Naravno , ovde je mnogo lakše izračunati zapreminu preko klasičnih formulica (iz srednje škole pa i osnovne)

Ako uzmemo da je baza trougao abO, njegova površina je $B=\frac{ab}{2}$, visina piramide je očigledno c, pa imamo:

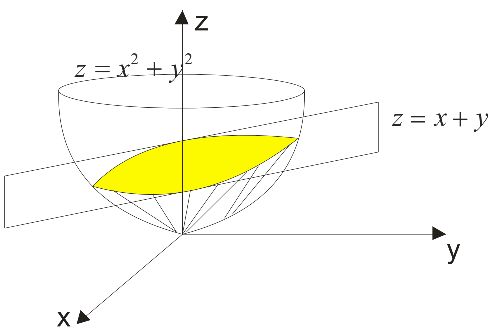
$$V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\frac{ab}{2}\cdot c=\boxed{\frac{abc}{6}}$$

Primer 2.

Izračunati zapreminu tela ograničenu sa $z = x^2 + y^2$ i $z = x + y$

Rešenje:

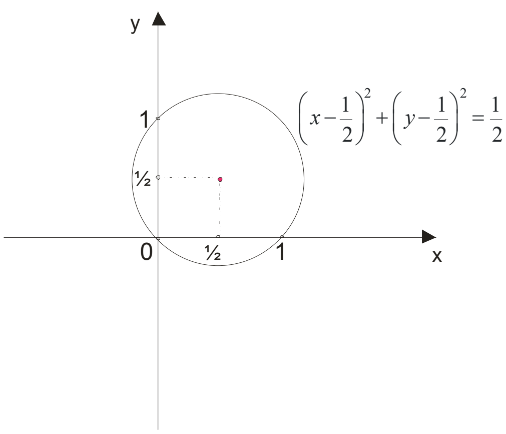
Ovde se radi o paraboloidu $z = x^2 + y^2$ i ravni $z = x + y$ koja ga seče.



Tražena zapremina je zapremina unutar paraboloida koju sa gornje strane ograničava ravan .

Nadjimo presek i projektujmo ga u xOz ravan.

$$x^2 + y^2 = x + y$$
$$x^2 - x + y^2 - y = 0$$
$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$



Uvodimo polarne koordinate:

$$\left.\begin{matrix} x = r\cos\varphi + \frac{1}{2} \\ y = r\sin\varphi + \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \to |J| = r$$

$$\left(r\cos\varphi+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\sin\varphi+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$r^2=\frac{1}{2}\to r=\frac{1}{\sqrt{2}}\to \boxed{0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Pogledajmo sliku u ravni još jednom...

Ugao obilazi ceo krug, pa je $0\le\varphi\le 2\pi$

Ovde se radi da od zapremine ispod ravni moramo oduzeti zapreminu ispod paraboloida:

$$V=\iint_D\left(z_1(x,y)-z_2(x,y)\right)dxdy$$

Ajmo ovo malo da prisredimo i da ubacimo smene:

$$\left(z_1(x,y)-z_2(x,y)\right)=\left(x+y-(x^2+y^2)\right)=-\left(x^2+y^2-x-y\right)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-\left((x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\left((x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\right)=\boxed{\frac{1}{2}-r^2}$$

$$V=\iint_D\left(z_1(x,y)-z_2(x,y)\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-r^2\right)rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{r}{2}-r^3\right)dr$$

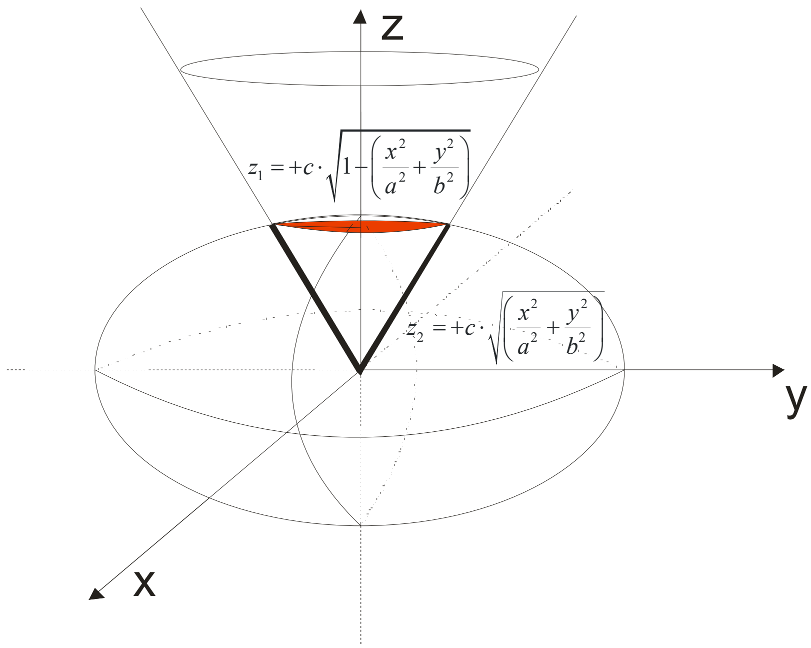
$$=2\pi\cdot\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\pi\cdot\left(\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}{4}\right)=2\pi\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)=2\pi\cdot\frac{1}{16}=\boxed{\frac{\pi}{8}}$$

Primer 3.

Izračunati zapreminu tela ograničenu sa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ i $\left(z>0,a>0,b>0,c>0\right)$

Rešenje:

Ovde se radi o elipsoidu i konusu. Pogledajmo sliku:



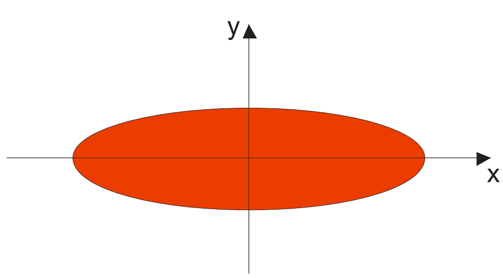
Tražena zapremina je izmedju ova dva tela. Odozgo je elipsoid a odozdo konus!

$$V = \iint_D \left(z_1(x,y) - z_2(x,y)\right) dxdy$$

Nadjimo granice rešavajući sistem I nacrtajmo taj presek u ravni xOy.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$

Dakle, presek je elipsa po kojoj uvodimo smene:



Uvodimo eliptičke koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{array}\right\} \rightarrow |J| = abr$$

Pogledajmo sliku u ravni *z = 0 (elipsa)*

Očigledno da ugao uzima ceo krug : $0 \le \varphi \le 2\pi$

A slično kao u prethodnom primeru:

$$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2=\frac{1}{2}$$

$$r^2=\frac{1}{2}\to r=\frac{1}{\sqrt{2}}\to \boxed{0\le r\le\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Pre nego krenemo u računanje zapremine moramo izraziti z iz obe jednačine:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{z^2}{c^2}=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$z^2=c^2\cdot\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]$$

$$z=\pm\sqrt{c^2\cdot\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]}$$

$$\boxed{z_1=+c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

$$z^2=c^2\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$z=\pm\sqrt{c^2\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$$\boxed{z_2=+c\cdot\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}}$$

Sad ovde ubacimo eliptičke koordinate:

$$z_1=+c\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$$\boxed{z_1=+c\cdot\sqrt{1-r^2}}$$

$$z_2=+c\cdot\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

$$\boxed{z_2=+c\cdot r}$$

Pošto je elipsoid odozgo a konus odozdo, od zapremine ispod elipsoida oduzećemo zapreminu ispod konusa.

$$V=\iint_D\left(z_1(x,y)-z_2(x,y)\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(c\sqrt{1-r^2}-cr\right)abrdr=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(r\sqrt{1-r^2}-r^2\right)dr$$

Sad ovaj integral nije teško rešiti: U prvom je smena $\begin{vmatrix}1-r^2=t^2\\-2rdr=2tdt\\rdr=-tdt\end{vmatrix}$, drugi odmah tablični:

Dobijamo zapreminu: $\boxed{V=\frac{abc\cdot\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)}$

Primer 4.

Izračunati zapreminu tela ograničenu sa $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

Rešenje:

Ovde se radi o paraboloidu koga isecaju dva konusa...

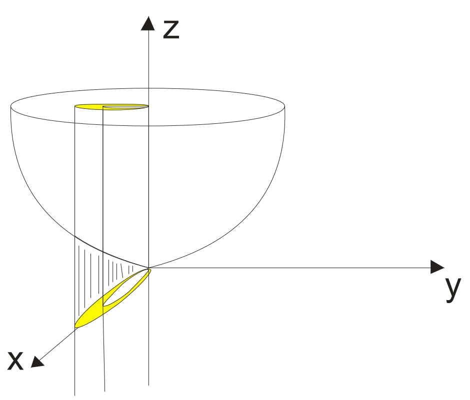
Spakujmo najpre konuse:

$$x^2 + y^2 = x$$
$$x^2 - x + y^2 = 0$$
$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

i

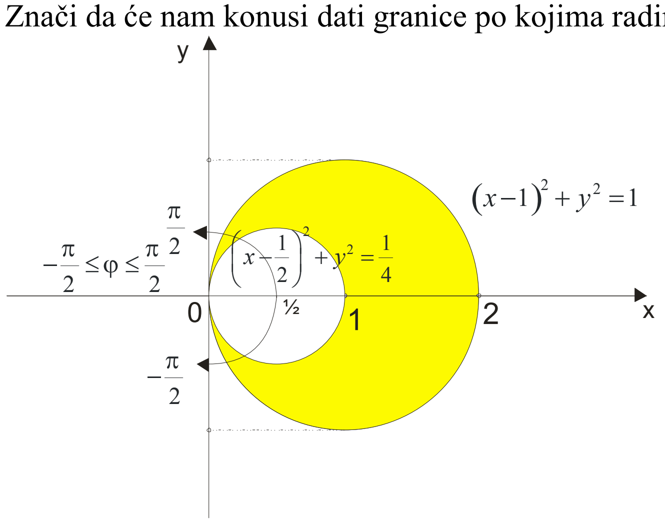
$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

Pogledajmo sliku u prostoru:



Tražena zapremina je ispod paraboloida , ali samo u delu izmedju ova dva konusa.

Znači da će nam konusi dati granice po kojima radimo…



Sad uzimamo polarne koordinate i odredjujemo granice:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \to |J| = r$$

$$\begin{array}{lll} x^2 + y^2 = x & & x^2 + y^2 = 2x \\ r^2 = r\cos\varphi & \text{i} & r^2 = 2r\cos\varphi \quad \text{pa je} \quad \boxed{\cos\varphi \le r \le 2\cos\varphi} \\ r = \cos\varphi & & r = 2\cos\varphi \end{array}$$

Ugao uzima vrednosti iz prvog i četvrtog kvadranta (vidi sliku)

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Znači , izračunavamo zapreminu ispod paraboloida koji odsecaju ova cilindra.

$$V = \iint_D z(x,y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^2 \cdot rdr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Bigg|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi$$

Pošto postoji simetrija u odnosu na x osu, odnosno ta dva dela zapremine su jednaka, lakše nam je da :

$$V = \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 2\cdot\frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi$$

Da bi rešili ovaj integral , malo prepakujemo podintegralnu funkciju:

$$\cos^4\varphi = \cos^2\varphi \cdot \cos^2\varphi = \cos^2\varphi \cdot (1 - \sin^2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi =$$
$$= \cos^2\varphi - \frac{4}{4}\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \cos^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \frac{1}{4}\frac{1-\cos 4\varphi}{2} =$$
$$= \frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \frac{1-\cos 4\varphi}{8}$$

Sad nije teško rešiti ove integrale...

Dobijamo rešenje:

$$\boxed{V = \frac{45\pi}{32}}$$

Primer 5.

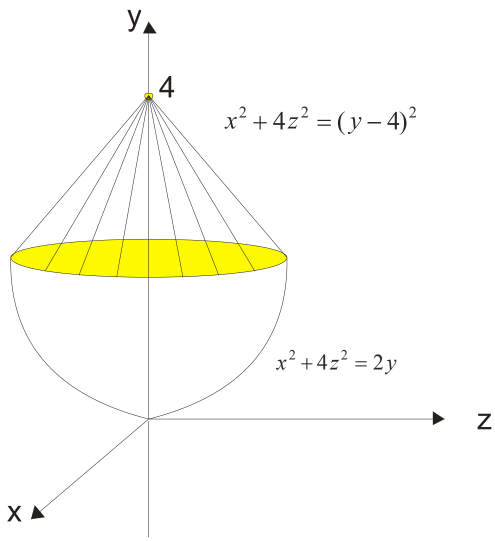
Izračunati zapreminu tela koje ograničavaju površi:

$x^2+4z^2=2y$ i $x^2+4z^2=(y-4)^2$ ako je $0\le y\le 4$

Rešenje:

Pazite , tela nisu sada data duž z ose već duž y ose!

To ne menja stvari, razmišljanje je isto, samo malo korigujemo formule.



Odozdo je paraboloid a odozgo konus. Pazite, konus ne kreće iz nule, već iz 4. (y - 4= 0 pa je y=4)

Da nadjemo preseke:

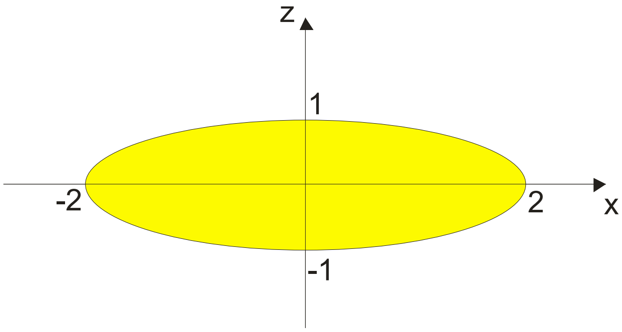
$$2y=(y-4)^2$$
$$y^2-8y+16-2y=0$$
$$y^2-10y+16=0$$
$$y_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}\rightarrow y_1=8\wedge y_2=2$$

Zbog $0\le y\le 4$ uzimamo da je y = 2.

Onda je :

$$x^2+4z^2=2y\wedge y=2$$
$$x^2+4z^2=4$$
$$\boxed{\frac{x^2}{4}+z^2=1}$$ Ovo nam je odlast D u ravni y = 0

Imamo elipsu:



Uzimamo:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2r\cos\varphi \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \rightarrow |J| = 2r \qquad \text{onda je}$$

$$\frac{x^2}{4} + z^2 = 1 \rightarrow \frac{(2r\cos\varphi)^2}{4} + (r\sin\varphi)^2 = 1 \rightarrow r^2 = 1 \rightarrow \boxed{0 \le r \le 1}$$

Ugao uzima vrednosti za pun krug $0 \le \varphi \le 2\pi$

Izrazimo y iz obe površi:

$$x^2 + 4z^2 = (y-4)^2$$
$$y - 4 = \pm\sqrt{x^2 + 4z^2}$$
$$y_1 = 4 - \sqrt{x^2 + 4z^2}$$

$$x^2 + 4z^2 = 2y$$
$$y_2 = \frac{x^2 + 4z^2}{2}$$

Zapremina će biti kad od zapremine ispod konusa (odozgo) oduzmemo zapreminu ispod paraboloida:

$$V = \iint_D \left(y_1(x,z) - y_2(x,z)\right) dxdz = \iint_D \left(4 - \sqrt{x^2 + 4z^2} - \frac{x^2 + 4z^2}{2}\right) dxdz =$$

$$= \iint_D \left(4 - \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4} + z^2\right)} - \frac{4\left(\frac{x^2}{4} + z^2\right)}{2}\right) dxdz = \iint_D \left(4 - 2\sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + z^2\right)} - 2\left(\frac{x^2}{4} + z^2\right)\right) dxdz$$

Sad kad smo malo prisredili prelazimo na polarne koordinate:

$$V = \iint_D \left(4 - 2\sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + z^2\right)} - 2\left(\frac{x^2}{4} + z^2\right)\right) dxdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(4 - r - 2r^2\right) r dr =$$

$$= 2\varphi \int_0^1 \left(4r - r^2 - 2r^3\right) dr = 2\varphi \cdot \left(4\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - 2\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 2\varphi \cdot \left(4\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}\right) = 2\varphi \cdot \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$V = 2\varphi \cdot \frac{5}{6} \rightarrow \boxed{V = \frac{10\pi}{3}}$$