NESVOJSTVENI INTEGRALI (teorija)

Neka je f(x) neprekidna funkcija na svakom konačnom intervalu [a , b] . Tada integrale:

i) $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

ii) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

iii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ gde je $-\infty < c < +\infty$

zovemo **NESVOJSTVENI** integrali sa beskonačnim granicama.

Ako nađemo rešenja za granične vrednosti na desnoj strani, to jest ako ona postoje i konačna su (nisu $\pm\infty$) onda su nesvojstveni integrali **KONVERGENTNI.** U suprotnom su **DIVERGENTNI.**

Šta bi geometrijski gledano mogao da znači nesvojstveni integral ?

Posmatrajmo prvi : $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

Geometrijsko značenje apsolutne vrednosti ovog nesvojstvenog integrala je **površina oblasti ograničene krivom y = f(x), x osom i pravom x = a**. Ova oblast se proteže u beskonačnost, a njena površina može biti konačna ili beskonačna. **Kako sad to?**

Ako x osa nije asimptota krive y = f(x) , nesvojstveni integral **divergira,** a površina je **sigurno beskonačna**.

Ako x osa jeste asimptota krive y = f(x) , Površina može biti konačna ili beskonačna. **Ako nesvojstveni integral konvergira, površina je konačna a ako divergira, površina je beskonačna.**

Nekad nam u zadacima ne traže da izračunamo nesvojstveni integral, već samo da utvrdimo da li konvergira ili divergira. Tu nam pomaže sledeći kriterijum (teorema):

Neka su f(x) i g(x) integrabilne funkcije na segmentu [a,b] gde je b>a i neka je $0 \le f(x) \le g(x)$ za $x \ge a$

Tada:

i) **Ako nesvojstveni integral** $\int_a^\infty g(x)dx$ **konvergira, onda konvergira i nesvojstveni integral** $\int_a^\infty f(x)dx$ **i važi da je** $\int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx$

ii) **Ako nesvojstveni integral** $\int_a^\infty f(x)dx$ **divergira, onda divergira i integral** $\int_a^\infty g(x)dx$

Ovaj kriterijum konvergencije može se primeniti ako funkcije f i g imaju isti znak. Ako podintegralna funkcija menja znak na posmatranom intervalu, tada možemo koristiti sledeći kriterijum(teoremu):

Neka je funkcija f(x) integrabilna na segmentu [a,b] za svaki b>a. Tada :

Ako $\int_a^\infty |f(x)|dx$ **konvergira, onda konvergira i** $\int_a^\infty f(x)dx$ **i pri tome je** $\left|\int_a^\infty f(x)dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|dx$

Još možemo zapamtiti i sledeće:

Ako integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konvergira, tada kažemo da nesvojstveni integral $\int_a^\infty f(x)dx$ **apsolutno** konvergira.

Ako integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergira a integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$ divergira onda kažemo da dati integral **uslovno** konvergira.

Šta se dešava ako funkcija f(x) nije ograničena u nekoj okolini tačke b ? (to jest prava x=b je vertikalna asimptota zdesna). Tada , ako je funkcija f(x) neprekidna na svakom intervalu [a,b-ε], ε>0 je

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Ako je f(x) neograničena u okolini tačke a (to jest prava x = a je vertikalna asimptota sleva) i neprekidna u svakom intervalu [a+ε , b] , ε>0 onda je :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Ova dva integrala zovemo **nesvojstveni sa neograničenim funkcijama .**

Posmatrajmo $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Geometrijsko značenje apsolutne vrednosti ovog integrala je površina oblasti omeđene krivom y = f(x) , ordinatom f(a) , x osom i vertikalnom asimptotom x = b.

Ako je situacija da je f(x) neograničena u okolini tačke c $\in$ **(a , b) (to jest prava x = c je vertikalna asimptota) i ako je f(x) neprekidna u svakom intervalu [a,c -** ε **] , [c +** ε **, b] ,** ε **>0 onda je :**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Ovde naravno važe kriterijumi analogni datim za integrale sa beskonačnim granicama.