EKSTREMUMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH (II deo)

USLOVNI EKSTREMUM

Ovde osim funkcije imamo zadate i uslove. Najčešće je to **jedan uslov**, ali u ozbiljnijim primerima mogu biti dva i više njih.

Ako je recimo zadata funkcija f (x) , i uslov φ (x) mi najpre oformimo funkciju :

$F(x) = f(x) + \lambda \cdot \varphi(x)$

λ je nepoznati koeficijenat koji tražimo:

- nađemo prve parcijalne izvode i izjednačimo ih sa nulom
- odatle izrazimo x i y preko λ
- zamenimo x i y u uslov φ (x) i odredili smo vrednost za λ (može ih biti i nekoliko)
- vratimo tu vrednost u x i y , dobijamo tako stacionarne tačke.
- tražimo drugi totalni diferencijal d^2F da bi ispitali da li je u pitanju maksimum ili minimum
  (ako je $d^2F < 0$ u pitanju je max, a ako je $d^2F > 0$ u pitanju je min.)

primer 1.

Naći uslovne ekstremume funkcije $z = ax + by$ **ako je uslov** $x^2 + y^2 = 1$

Rešenje:

Dakle, prvo oformimo funkciju:

$F = ax + by + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ pazite , stavlja se uslov izjednačen sa nulom! $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 1 = 0}$

Dalje tražimo prve parcijalne izvode i izjednačavamo ih sa 0.

$$F = ax + by + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a + 2\lambda x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = a + 2\lambda y$$

$$a + 2\lambda x = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{a}{2\lambda}}$$

$$b + 2\lambda y = 0 \rightarrow \boxed{y = -\frac{b}{2\lambda}}$$

Ovo zamenimo u uslov da nađemo vrednost za λ:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(-\frac{a}{2\lambda})^2 + (-\frac{b}{2\lambda})^2 = 1$$

$$\frac{a^2}{4\lambda^2} + \frac{b^2}{4\lambda^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 4\lambda^2 \rightarrow \lambda^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}} \rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = +\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \wedge \quad \boxed{\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Imamo dve vrednosti , što znači da imamo dve stacionarne tačke. Najpre ćemo zameniti λ_1

$$\lambda_1 = +\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$x = -\frac{a}{2\lambda} \rightarrow x = -\frac{a}{\cancel{2}\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\cancel{2}}} \rightarrow \boxed{x = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$y = -\frac{b}{2\lambda} \rightarrow y = -\frac{b}{\cancel{2}\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\cancel{2}}} \rightarrow \boxed{y = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$\boxed{M(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})}$$

Ispitujemo da li je maksimum ili minimum preko totalnog diferencijala drugog reda:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a + 2\lambda x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = a + 2\lambda y$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

pa je odavde:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$
$$d^2F = 2\lambda dx^2 + 0 + 2\lambda dy^2$$
$$\boxed{d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)}$$
$$\lambda_1 = +\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$
$$d^2F = \cancel{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cancel{2}}(dx^2 + dy^2)$$
$$d^2F = \sqrt{a^2+b^2}\cdot(dx^2+dy^2) \to \boxed{d^2F > 0}$$

Kako je $d^2F > 0$, tačka je **minimum**, zamenjujemo je u početnu funkciju da nađemo tu minimalnu vrednost:

$$z_{\min} = ax + by$$
$$z_{\min} = a\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + b\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$z_{\min} = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$z_{\min} = -\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\boxed{z_{\min} = -\sqrt{a^2+b^2}}$$

Sad isti postupak radimo i za drugu vrednost $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$:

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$
$$x = -\frac{a}{2\lambda} \to x = -\frac{a}{-\cancel{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cancel{2}}} \to \boxed{x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$
$$y = -\frac{b}{2\lambda} \to y = -\frac{b}{-\cancel{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cancel{2}}} \to \boxed{y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$\boxed{N\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}$$

$$\boxed{d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$d^2F = -\cancel{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cancel{2}}(dx^2 + dy^2)$$

$$d^2F = -\sqrt{a^2+b^2}\cdot(dx^2 + dy^2) \rightarrow \boxed{d^2F < 0}$$

Zaključujemo da je ovo tačka **maksimuma**, pa da odredimo tu maksimalnu vrednost funkcije:

$$z_{\max} = ax + by$$

$$z_{\max} = a\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + b\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$z_{\max} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$z_{\max} = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{z_{\max} = \sqrt{a^2+b^2}}$$

primer 2.

Naći uslovne ekstremume funkcije $u = x - 2y + 2z$ **ako je uslov** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

<u>Rešenje:</u>

Oformimo funkciju: $F = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, pa nadalje sve po opisanom postupku:

$$F = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x \qquad 1 + 2\lambda x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y \qquad -2 + 2\lambda y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z \qquad 2 + 2\lambda z = 0 \rightarrow z = -\frac{1}{\lambda}$$

Menjamo ove vrednosti u uslov:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$(-\frac{1}{2\lambda})^2+(\frac{1}{\lambda})^2+(-\frac{1}{\lambda})^2=1$$

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1............./\cdot 4\lambda^2$$

$$1+4+4=4\lambda^2$$

$$\lambda^2=\frac{9}{4}\to\lambda=\pm\frac{3}{2}\to\boxed{\lambda_1=+\frac{3}{2}}\vee\boxed{\lambda_2=-\frac{3}{2}}$$

Opet imamo **dve vrednosti za lambda**, pa za svaku radimo posebno:

Za $\lambda_1=+\frac{3}{2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x\to\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2+2\lambda y\to\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2+2\lambda z\to\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=2\lambda$$

$$d^2F=2\lambda d^2x+2\lambda d^2y+2\lambda d^2z=2\lambda(d^2x+d^2y+d^2z)$$

$$d^2F=\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}(d^2x+d^2y+d^2z)$$

$$d^2F=3(d^2x+d^2y+d^2z)\to\boxed{d^2F>0}$$

$M(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ je minimum

$$u=x-2y+2z$$

$$u_{(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})}=-\frac{1}{3}-2\cdot\frac{2}{3}+2\cdot(-\frac{2}{3})=-3$$

$$\boxed{u_{\min}=-3}$$

Za $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$

$x = -\frac{1}{2\lambda} \to \boxed{x = \frac{1}{3}}$

$y = \frac{1}{\lambda} \to \boxed{y = -\frac{2}{3}}$

$z = -\frac{1}{\lambda} \to \boxed{z = +\frac{2}{3}}$

$\boxed{N(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})}$

pa je

$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x \to \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$

$\frac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y \to \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z \to \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\lambda$

$d^2F = 2\lambda d^2x + 2\lambda d^2y + 2\lambda d^2z = 2\lambda(d^2x + d^2y + d^2z)$

$d^2F = \cancel{2} \cdot (-\frac{3}{\cancel{2}})(d^2x + d^2y + d^2z)$

$d^2F = -3(d^2x + d^2y + d^2z) \to \boxed{d^2F < 0}$

$N(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je maksimum

$u = x - 2y + 2z$

$u_{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})} = \frac{1}{3} - 2 \cdot (-\frac{2}{3}) + 2 \cdot \frac{2}{3} = 3$

$\boxed{u_{\max} = 3}$

<u>USLOVNI EKSTREMUM</u>

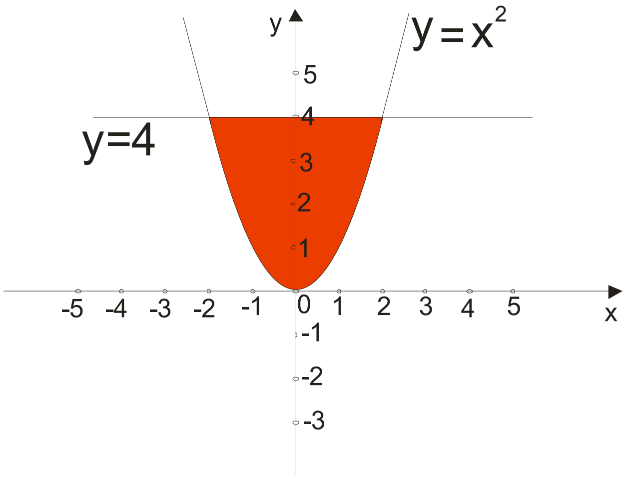
Diferencijabilna funkcija f(x) dostiže najveću ili najmanju vrednost, u zatvorenoj i ograničenoj oblasti, u stacionarnoj tački ili u graničnoj tački te oblasti!

primer 3.

Naći najmanje i najveće vrednosti funkcije $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ **u zatvorenoj oblasti ograničenoj krivama:** $y = x^2$ **i** $y = 4$

Rešenje:

Ovde najpre moramo nacrtati sliku i uočiti oblast:



Stacionarne tačke tražimo na uobičajan način:

$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 8x - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \to 6x^2 + 8x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \to 2y - 2x = 0 \to \boxed{x = y}$$

$x = y$ zamenimo u $\to 6x^2 + 8x - 2y = 0$

$$6x^2 + 8x - 2x = 0 \to 6x^2 + 6x = 0 \to x_1 = 0, \;\; x_2 = -1$$

$$x_1 = 0 \to y_1 = 0 \to \boxed{M_1(0,0)}$$

$$x_2 = -1 \to \; y_2 = -1 \to \boxed{M_2(-1,-1)}$$

Dalje moramo odrediti vrednost početne funkcije u ovim tačkama:

$M_1(0,0)$

$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

$$z_{(0,0)} = 2\cdot 0^3 + 4\cdot 0^2 + 0^2 - 2\cdot 0\cdot 0 = 0$$

$$\boxed{z_{(0,0)} = 0}$$

i

$M_2(-1,-1)$

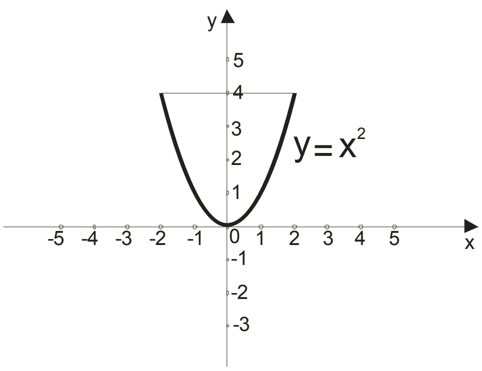
$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

$$z_{(-1,-1)} = 2(-1)^3 + 4(-1)^2 + (-1)^2 - 2(-1)(-1) = -2 + 4 + 1 - 2 = 1$$

$$\boxed{z_{(-1,-1)} = 1}$$

Za sad **ne znamo** da li su ovo tačke ekstremuma, moramo ispitati i granične tačke.

Najpre ćemo ispitati za **tačke na paraboli**.



Zamenimo $y = x^2$ u zadatu funkciju i tražimo izvod.

$$y = x^2$$
$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
$$z_{(y=x^2)} = 2x^3 + 4x^2 + (x^2)^2 - 2x(x^2)$$
$$z_{(y=x^2)} = \cancel{2x^3} + 4x^2 + x^4 \cancel{-2x^3}$$
$$z_{(y=x^2)} = x^4 + 4x^2$$

Tražimo izvod:

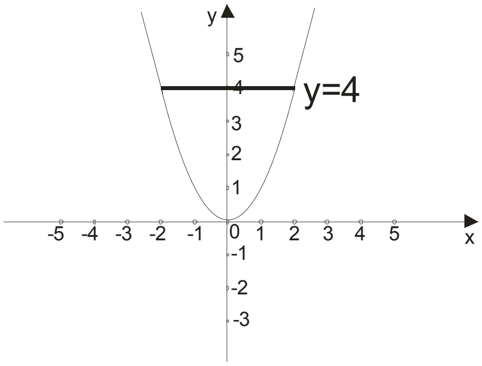
$$z` = 4x^3 + 8x$$
$$z` = 0 \to 4x^3 + 8x = 0 \to 4x(x^2 + 2) = 0 \to \boxed{x = 0}$$
$$y = x^2 \to y = 0^2 \to \boxed{y = 0}$$

Dobili smo $\boxed{M_3(0,0)}$

Ovu tačku smo već dobili kao stacionarnu...

$$M_3(0,0) = M_1(0,0)$$
$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
$$z_{(0,0)} = 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$
$$\boxed{z_{(0,0)} = 0}$$

Sad ispitujemo tačke na pravoj ***y = 4***



$$y = 4$$
$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
$$z_{(y=4)} = 2x^3 + 4x^2 + 4^2 - 2x \cdot 4$$
$$z_{(y=4)} = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$$

Tražimo izvod:

$$z` = 6x^2 + 8x - 8$$
$$z` = 0 \to 6x^2 + 8x - 8 = 0 \to x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -2$$
$$\boxed{M_4 = (\frac{2}{3}, 4)}, \quad \boxed{M_5 = (-2, 4)}$$

$$M_4(\frac{2}{3}, 4)$$
$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
$$z_{(\frac{2}{3},4)} = 2 \cdot (\frac{2}{3})^3 + 4 \cdot (\frac{2}{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot (\frac{2}{3}) \cdot 4 = 0$$
$$z_{(\frac{2}{3},4)} = \frac{16}{27} + \frac{16}{9} + 16 - \frac{16}{3} = \frac{176}{27} = 6\frac{12}{27}$$
$$\boxed{z_{(\frac{2}{3},4)} = 6\frac{12}{27}}$$

i

$$M_5(-2, 4)$$
$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
$$z_{(-2,4)} = 2 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 4^2 - 2 \cdot (-2) \cdot 4 = 0$$
$$z_{(-2,4)} = -16 + 16 + 16 + 16$$
$$\boxed{z_{(-2,4)} = 32}$$

Dakle:

Funkcija ima maksimalnu vrednost u tački $M_5(-2, 4)$ **koja iznosi:** $z_{(-2,4)} = 32$

Funkcija ima minimalnu vrednost u tački $M_3(0,0) = M_1(0,0)$ **koja iznosi:** $z_{(0,0)} = 0$