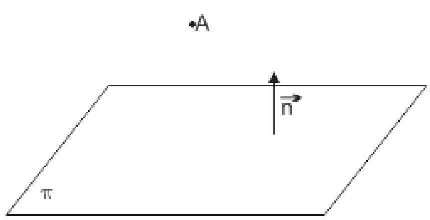
Projekcije i simetrije

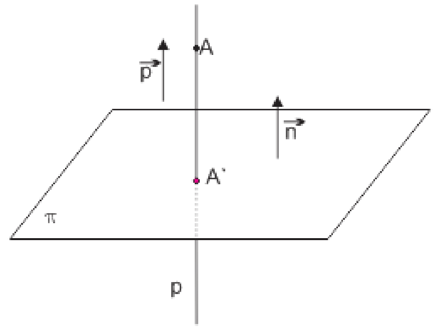
Primer 1.

Odrediti projekciju tačke A(2,3,-1) na ravan $\pi : 2x-3y+z-5=0$

Rešenje:

Da najpre skiciramo problem i objasnimo kako doći do projekcije...





Na prvoj slici smo nacrtali ravan π , njen vektor normalnosti $\vec{n}=(2,-3,1)$ i datu tačku A.

Ideja je da kroz tačku A postavimo pravu p koja je normalna na ravan π .

Kako je prava odredjena svojim paralelnim vektorom a ravan vektorom normalnim na nju, zaključujemo da kad je situacija da je prava normalna na ravan, ta dva vektora imaju istu vrednost!

Dakle $\vec{n}=\vec{p}=(2,-3,1)$.

Koristimo jednačinu prave kroz jednu tačku:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \quad \text{pa je} \quad p:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{1}$$

Sad je prebacimo u parametarski oblik i nadjemo PRODOR kroz ravan π :

$$p:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{1}=t \rightarrow \begin{cases} x=2t+2 \\ y=-3t+3 \\ z=t-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\cdot(2t+2)-3\cdot(-3t+3)+(t-1)-5=0 \\ 4t+4+9t-9+t-1-5=0 \\ 14t-11=0 \rightarrow t=\dfrac{11}{14} \end{cases}$$

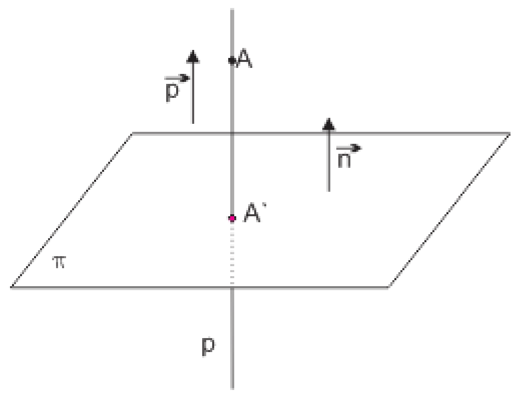
Odavde je tačka prodora, to jest naša tražena projekcija A`: $\begin{cases} x=2t+2=2\cdot\dfrac{11}{14}+2=\dfrac{11}{7}+\dfrac{14}{7}=\dfrac{25}{7} \\ y=-3t+3=-3\cdot\dfrac{11}{14}+2=-\dfrac{33}{14}+\dfrac{28}{14}=-\dfrac{5}{14} \\ z=t-1=\dfrac{11}{14}-1=-\dfrac{3}{14} \end{cases}$

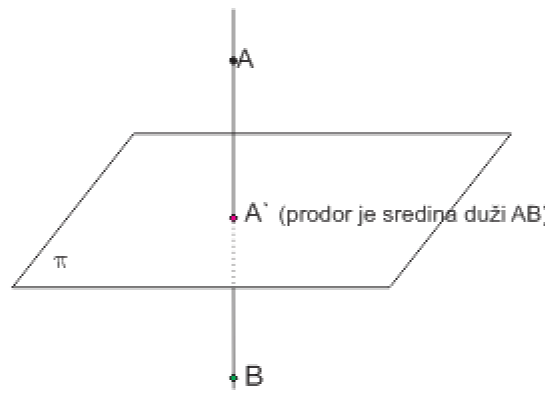
Primer 2.

Naći tačku B simetričnu sa tačkom A(-2,0,3) u odnosu na ravan $\pi: x-y+5z+\frac{1}{2}=0$

Rešenje:

Prvi deo posla je isti kao u prethodnom zadatku, trebamo naći projekciju tačke A na ravan π (slika 1.)





Dalje je ideja da je taj prodor A` sredina duži AB, pa ćemo preko toga naći koordinate tačke B.(slika 2.)

Iz $\pi: x-y+5z+\frac{1}{2}=0$ je $\vec{n}=\vec{p}=(1,-1,5)$ a jednačina prave *p* , normalne na datu ravan je:

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ sledi $p:\frac{x+2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{5}$

$$p:\frac{x+2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{5}=t \rightarrow \begin{cases} x=t-2 \\ y=-t \\ z=5t+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y+5z+\frac{1}{2}=0 \\ t-2+t+25t+15+\frac{1}{2}=0 \\ 27t+\frac{27}{2}=0 \rightarrow t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Koordinate tačke A` su $\begin{cases} x=t-2=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2} \\ y=-t=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2} \\ z=5t+3=-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{2} \end{cases}$ to jest $A`(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Sredina duži se računa $S(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$

Mi znamo da je sredina (prodor) $A`(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ a koordinate tačke A(-2,0,3).

Obeležimo da je B(x,y,z), imamo:

$$\frac{x+(-2)}{2}=-\frac{5}{2}\rightarrow x-2=-5\rightarrow \boxed{x=-3}$$
$$\frac{y+0}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow \boxed{y=1}$$
$$\frac{z+3}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow z+3=1\rightarrow \boxed{z=-2}$$

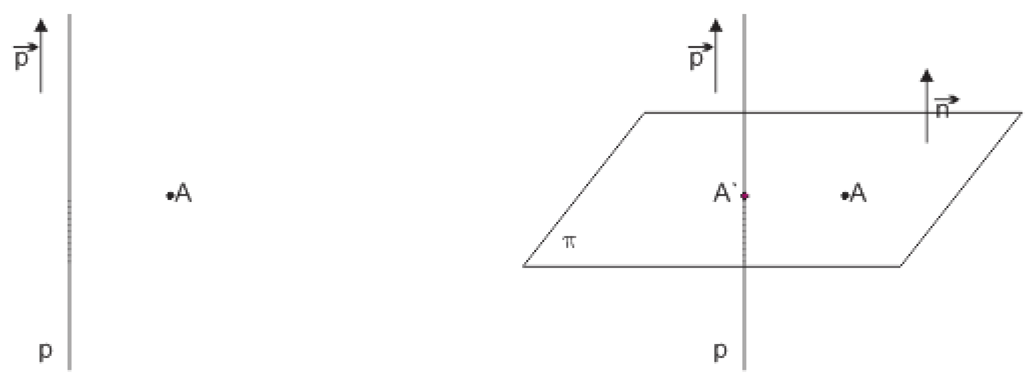
Dobili smo rešenje: B(-3,1,-2).

Primer 3.

Odrediti projekciju tačke A (1,1,1) na pravu $p:\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{-3}$

Rešenje:

Da skiciramo problem i objasnimo ideju….



Na prvoj slici imamo pravu *p* odredjenu svojim paralelnim vektorom. Kroz tačku A ćemo postaviti ravan normalnu na datu pravu !

Mesto gde prava prodire ravan, tačka A` je tražena projekcija tačke A na pravu *p*.

Kako su prava i ravan normalni to je $\vec{n}=\vec{p}=(3,1,-3)$

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$
$$3(x-1)+1(y-1)-3(z-1)=0$$
$$3x-3+y-1-3z+3=0$$
$$3x+y-3z-1=0$$

Dobili smo jednačinu ravni, sad pravu prebacimo u parametarski oblik i nadjemo prodor:

$$p: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-3} = t \rightarrow \begin{cases} x = 3t-2 \\ y = t+2 \\ z = -3t+4 \end{cases}$$

$$3x + y - 3z - 1 = 0$$
$$3(3t-2) + (t+2) - 3(-3t+4) - 1 = 0$$
$$9t - 6 + t + 2 + 9t - 12 - 1 = 0$$
$$19t - 17 = 0$$
$$t = \frac{17}{19}$$

$$\begin{cases} x = 3t-2 = 3\cdot\frac{17}{19} - 2 = \frac{51}{19} - \frac{38}{19} = \frac{13}{19} \\ y = t+2 = \frac{17}{19} + 2 = \frac{17}{19} + \frac{38}{19} = \frac{55}{19} \\ z = -3t+4 = -3\cdot\frac{17}{19} + 4 = -\frac{51}{19} + \frac{76}{19} = \frac{25}{19} \end{cases}$$

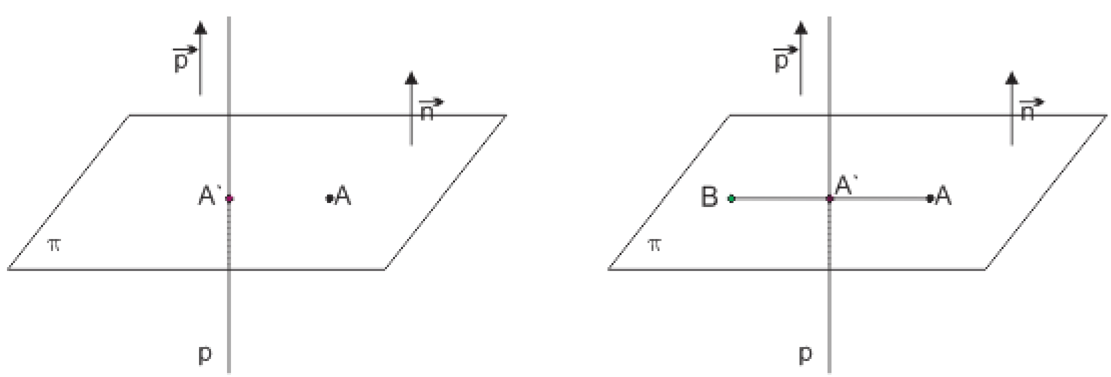
$$A`(\frac{13}{19}, \frac{55}{19}, \frac{25}{19})$$

Primer 4.

Naći tačku B simetričnu sa tačkom A(4,3,10) u odnosu na pravu $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$

Rešenje:

Prvi deo posla je isti kao u prethodnom primeru, trebamo naći projekciju tačke na pravu (slika 1.)



Zatim ćemo iskoristiti da je projekcija A` sredina duži AB.

Najpre postavimo ravan normalnu na pravu:

Kako su prava i ravan normalni to je $\vec{n} = \vec{p} = (2,4,5)$

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$
$$2(x-4)+4(y-3)+5(z-10)=0$$
$$2x-8+4y-12+5z-50=0$$
$$2x+4y+5z-70=0$$

Pravu prebacimo u parametarski oblik:

$$p:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}=t \rightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=4t+2 \\ z=5t+3 \end{cases}$$

Zamenimo u jednačinu ravni:

$$2x+4y+5z-70=0$$
$$2(2t+1)+4(4\mathrm{t}+2)+5(5\mathrm{t}+3)-70=0$$
$$4\mathrm{t}+2+16\mathrm{t}+8+25\mathrm{t}+15-70=0$$
$$45\mathrm{t}-45=0$$
$$\mathrm{t}=1$$

Prodor (odnosno projekcija) je

$$\begin{cases} x=2t+1=2+1=3 \\ y=4t+2=4+2=6 \\ z=5t+3=5+3=8 \end{cases}$$

A` (3, 6, 8)

Sad iskoristimo da je A` sredina duži AB:

Obeležimo da je B (x,y,z)

$$\frac{x+4}{2}=3 \rightarrow x+4=6 \rightarrow \boxed{x=2}$$
$$\frac{y+3}{2}=6 \rightarrow y+3=12 \rightarrow \boxed{y=9}$$
$$\frac{z+10}{2}=8 \rightarrow z+10=16 \rightarrow \boxed{z=6}$$

Koordinate tražene tačke B, simetrične sa tačkom A u odnosu na pravu p su B(2,9,6)

Primer 5.

Odrediti projekciju prave $p:\begin{cases} \vec{r}\cdot(3\vec{i}+2\vec{j})-3=0 \\ \vec{r}\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=0 \end{cases}$ **na ravan** $\pi: 2x+y-z+5=0$

Rešenje:

Primećujemo da nam je prava data kao presek dve ravni, koje su opet zapisane u vektorskom obliku.

$$p:\begin{cases} \vec{r}\cdot(3\vec{i}+2\vec{j})-3=0 \to (x,y,z)\cdot(3,2,0)-3=0 \to \boxed{3x+2y-3=0} \\ \vec{r}\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=0 \to (x,y,z)\cdot(1,1,1)=0 \to \boxed{x+y+z=0} \end{cases}$$

Ovde naravno možemo upotrebiti poznati postupak prebacivanja u kanonski oblik, ali je malo brže

ako iskoristimo **pramen** ravni . Iz tog pramena ravni mi tražimo onu ravan koja je **normalna** na datu ravan!

Jednačina pramena ravni je

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

Za našu situaciju

$$3x+2y-3+\lambda(x+y+z)=0$$
$$3x+2y-3+\lambda x+\lambda y+\lambda z=0$$
$$(3+\lambda)x+(2+\lambda)y+\lambda z-3=0$$

Vektor normalnosti celog pramena je $\vec{n}_{pr}=(3+\lambda,2+\lambda,\lambda)$

Vektor normalnosti za ravan $\pi: 2x+y-z+5=0$ je $\vec{n}=(2,1,-1)$

Mi iz pramena tražimo ravan normalnu na π , a znamo da je uslov normalnosti : skalarni proizvod je jednak 0.

Dakle:

$$\vec{n}_{pr}\cdot\vec{n}=0$$
$$(3+\lambda,2+\lambda,\lambda)\cdot(2,1,-1)=0$$
$$2(3+\lambda)+1(2+\lambda)-1\lambda=0$$
$$6+2\lambda+2+\lambda-\lambda=0$$
$$2\lambda=-8$$
$$\lambda=-4$$

Ovu vrednost zamenimo u pramen:

$(3+\lambda)x+(2+\lambda)y+\lambda z-3=0 \to -x-2y-4z-3=0 \to x+2y+4z+3=0$ je ravan normalna na π

Jednačina prave je $p`:\begin{cases} 2x+y-z+5=0 \\ x+2y+4z+3=0 \end{cases}$

Da prebacimo pravu u kanonski oblik:

Tražimo vektor paralelnosti:

$$\vec{p`}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\vec{i}(4+2)-\vec{j}(8+1)+\vec{k}(4-1)=6\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}=(6,-9,3)$$

$$\vec{p`}=(6,-9,3),\ \text{odnosno}\ \ \vec{p`}=3(2,-3,1)\rightarrow\vec{p`}=(2,-3,1)$$

Rešavamo sistem

$$\begin{aligned} 2x+y-z+5&=0 \\ x+2y+4z+3&=0 \end{aligned}$$

Za proizvoljno , recimo z=0 imamo:

$$\begin{aligned} &2x+y+5=0 \\ &\underline{x+2y+3=0} \\ &2x+y+5=0 \\ &\underline{-2x-4y-6=0} \\ &-3y-1=0\rightarrow y=-\frac{1}{3}\rightarrow x=-\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Dobijamo:

$$p`:\frac{x+\frac{7}{3}}{2}=\frac{y+\frac{1}{3}}{-3}=\frac{z}{1}$$

www.matematiranje.in.rs