SVODJENJE NA KANONSKI OBLIK
(KRIVE DRUGOG REDA)

- POSTUPAK -

Opšta jednačina drugog stepena po x i y je jednačina oblika :

$$\mathbf{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

pri čemu za koeficijente A,B,C,D,E,F iz skupa R važi da je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Kako krivu zadatu u ovom obliku svesti na kanonski oblik?

Moramo vršiti transformacije koordinatnog sistema : TRANSLACIJU I ROTACIJU .

Prvo uvek proverimo da li zadata kriva ima centar !

Naravno , najpre nadjemo vrednosti za koeficijente A,B,C,D,E,F

Ako je D = E = 0 zaključujemo odmah da kriva ima centar u O(0,0) t.j. u koordinatnom početku.

Rešavamo sistem jednačina:

$$\left.\begin{array}{l} Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + Cb + E = 0 \end{array}\right\}$$

Ovaj sistem ima jedinstveno rešenje ako je $AC - B^2 \neq 0$

Tada nadjemo centar O\` (a,b).

Ako kriva ima centar O\` (a,b) onda **vršimo translaciju :**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x = x' + a} \\ \mathbf{y = y' + b} \end{array}\right\}$$

Zamenimo x i y u datu jednačinu i ako smo dobro radili **“nestaće” članovi uz x i y.**

Znači ostaje oblik $\mathbf{A_1x'^2 + 2B_1x'y' + C_1y'^2 + F_1 = 0}$

Dalje **vršimo rotaciju** sistema x\`O\`y\` za ugao α , gde je $0<\alpha<\pi$. Koristimo:

$ctg2\alpha = \dfrac{A-C}{2B}$ pa kad odavde nadjemo ugao α , idemo u formule rotacije:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha} \\ \mathbf{y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha} \end{array}\right\}$$

x\` i y\` zamenimo , ako smo dobro radili ovo nas **‘oslobadja’ od člana sa x\`y\`.**

Znači ostaje oblik $\mathbf{A_2x''^2 + C_2y''^2 + F_2 = 0}$

A odavde, iz oblika $\mathbf{A_2x''^2 + C_2y''^2 + F_2 = 0}$ zaključujemo o kojoj krivi je reč!

PAZI:

Ako se desi da sistem $Aa + Bb + D = 0$, $Ba + Cb + E = 0$ nema rešenje,odnosno ako data kriva nema centar onda prvo vršimo rotaciju!

Šta sve može biti naše rešenje?

- **kružna linija** $(x - p)^2 + (y - q)^2 = 0$ gde su (p,q) koordinate centra
- **elipsa** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a je velika poluosa, b je mala poluosa (može i obrnuto)
- **hiperbola** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a je realna poluosa , b je imaginarna poluosa
- **parabola** $y^2 = 2px$ ili $x^2 = 2py$
- **par pravih sa jednom zajedničkom tačkom**
- **dve paralelne prave**
- **tačka**
- **prazan skup tačaka**

Kako da znamo koja je kriva u pitanju? Posmatramo $A_2x``^2 + C_2y``^2 + F_2 = 0$

i) Ako je $A_2C_2 = AC - B^2 > 0$, to jest ako su A_2 i C_2 istog znaka, kriva je **ELIPTIČKOG** tipa i to :

- **elipsa** ako je F_2 suprotnog znaka od A_2
- **tačka**, ako je $F_2 = 0$
- **prazan skup** tačaka (imaginarna elipsa) ako je F_2 istog znaka kao A_2
- **kružna linija** , ako je $A_2 = C_2$ i F_2 različitog znaka od A_2

---

ii) Ako je $A_2C_2 = AC - B^2 < 0$ to jest A_2 i C_2 su različitog znaka kriva je **HIPERBOLIČKOG** tipa i to:

- **hiperbola** za $F_2 \neq 0$ i još važi: Ako su F_2 i A_2 suprotnog znaka $O`x``$ je realna osa, a ako su $F_2$ i $A_2$ istog znaka realna osa je $O`y``$

- **par pravih koje se seku** u tački $O`$ ako je $F_2 = 0$

---

iii) Krive **PARABOLIČKOG** tipa

Šta se dešava u slučaju kada je $AC - B^2 = 0$, to jest kada sistem $\mathbf{Aa + Bb + D = 0}$, $\mathbf{Ba + Cb + E = 0}$ **nema jedinstveno rešenje?**

Već smo pomenuli da tada prvo vršimo rotaciju!

Dobijemo jednačinu : $A_1x`^2 + C_1y`^2 + 2D_1x` + 2E_1y` + F_1 = 0$

Desiće nam se jedna od sledeće dve situacije: $\mathbf{A_1 = 0}$ ili $\mathbf{C_1 = 0}$

1) $\mathbf{A_1 = 0}$, i tada jednačina postaje $C_1y`^2 + 2D_1x` + 2E_1y` + F_1 = 0$, ovde izvršimo dopunu do punog kvadrata po ipsilon i izvršimo translaciju koja nam daje **parabolu**! Za one koji ne vole mnogo da mozgaju evo gotove formule te translacije: $x`` = x` + \frac{F_1}{2D_1} - \frac{F_1^2}{2C_1D_1}$ i $y`` = y` + \frac{E_1}{C_1}$

Ako je i $D_1 = 0$ onda jednačina postaje kvadratna po ipsilon $C_1y`^2 + 2E_1y` + F_1 = 0$, probamo da je rešimo i ako ima realna rešenja, onda ta rešenja predstavljaju **dve paralelne prave**; ako su rešenja ista, onda se te dve prave **poklapaju**; i ako nema rešenja u pitanju je **imaginarna kriva.**

---

2) **Ako je $\mathbf{C_1 = 0}$** onda imamo $A_1x`^2 + 2D_1x` + 2E_1y` + F_1 = 0$, slično kao malopre vršimo dopunu do punog kvadrata, samo sad po iks, itd…….

Dobijamo parabolu, dve paralelne prave ili imaginarnu krivu.

Šta najčešće pravi problem?

Kad radimo rotaciju i koristimo formulu $ctg2\alpha = \frac{A-C}{2B}$ može se desiti da vrednost $\frac{A-C}{2B}$ ne bude "lep" broj.

Lepi su brojevi 0, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, ± 1, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\infty$ jer za njih znamo o kom uglu se radi!

Ako nam padne neki drugi broj, onda moramo koristiti trigonometrijske formulice:

$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$ pa odavde oformimo kvadratnu jednačinu po ctgα **i nađemo ctgα**

Dalje znamo da je $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ i $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Odavde nadjemo vrednosti za **sinα i cosα i to menjamo u formule rotacije:**

x\` = x\`\`cos$\alpha$ - y\`\`sinα

y\` = x\`\`sin$\alpha$ + y\`\`cosα

Najbolje je da pogledate nekoliko uradjenih primera iz sledećeg fajla, pa onda probajte sami!