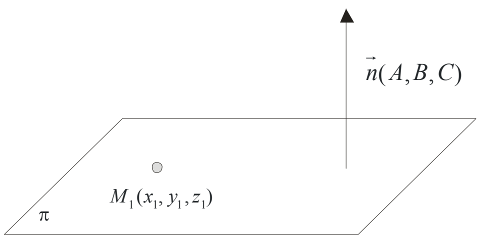
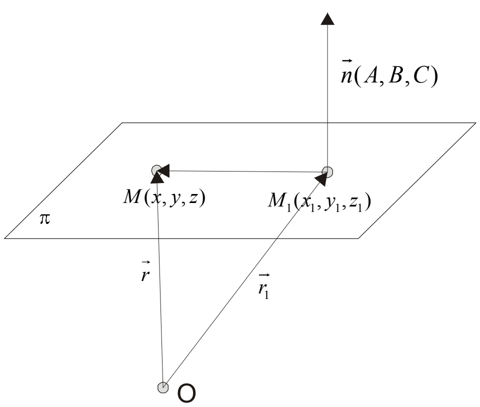
RAVAN

Ravan je osnovni pojam u geometriji i kao takav se ne definiše.

Ravan je određena tačkom i normalnim vektorom.



Da bi izveli jednačinu ravni , proučimo sledeću sliku:



Neka su $\vec{r}$ i $\vec{r_1}$ vektori položaja tačaka M i M_1 . Odavde je: $\overline{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1}$

a kako je vektor $\vec{n}(A,B,C)$ normalan na ravan π , to njihov skalarni proizvod mora biti jednak 0.

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_1}) = 0}$$

Ovo je jednačina ravni π u **vektorskom obliku**.

A kako je $\overline{M_1M} = \vec{r} - \vec{r_1} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ i $\vec{n} = (A,B,C)$ dobijamo :

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_1}) = (A,B,C) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$
$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0}$$

A ovo je jednačina ravni u skalarnom obliku.(odnosno **kroz jednu datu tačku**)

Primer 1.

Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačku M(2,1,3) i normalna je na vektor $\vec{n} = (1, -1, 2)$

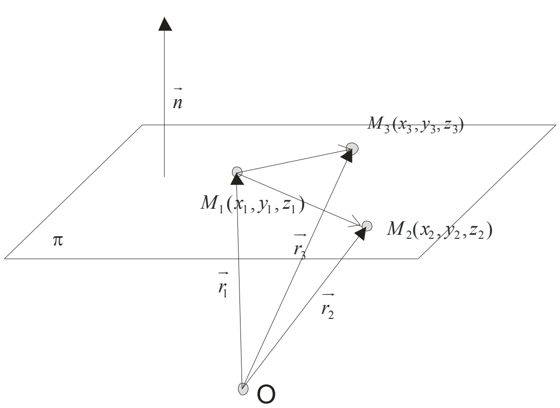
Rešenje:

$$
\begin{aligned}
&A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \\
&1(x - 2) - 1(y - 1) + 2(z - 3) = 0 \\
&x - 2 - y + 1 + 2z - 6 = 0 \\
&x - y + 2z - 7 = 0
\end{aligned}
$$

Odavde dobijamo i **opštu jednačinu ravni** :

$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$, gde je $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Ako su nam date tri tačke $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, onda jednačinu ravni tražimo:



$(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot [(\vec{r_2} - \vec{r_1}) \times (\vec{r_3} - \vec{r_1})] = 0$ u vektorskom obliku i

$$
\begin{vmatrix}
x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\
x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\
x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1
\end{vmatrix} = 0
$$ u skalarnom obliku.

Primer 2.

Date su tačke A(-1,2,-1) , B(0,-4,3) i C(1,-1,-2). Napisati jednačinu ravni koju one odredjuju.

Rešenje

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 0+1 & -4-2 & 3+1 \\ 1+1 & -1-2 & -2+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Razvijamo je po prvoj vrsti...

$(x+1)(6+12)-(y-2)(-1-8)+(z+1)(-3+12)=0$

$18(x+1)+9(y-2)+9(z+1)=0$

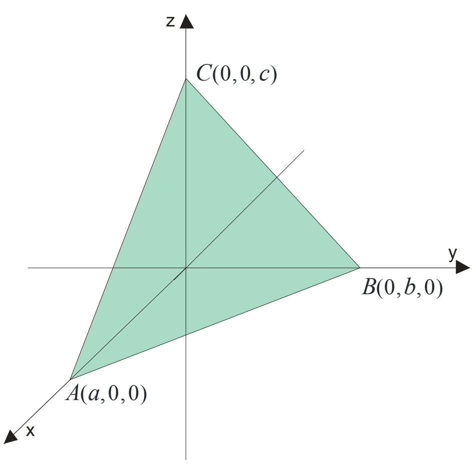
$18x+18+9y-18+9z+9=0$

$18x+9y+9z+9=0$ ..../:9

2x + y + z + 1= 0

U situacijama kad trebamo nacrtati ravan , najbolje je koristiti **segmentni oblik**:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$



Naravno, a,b i c su odsečci na x, y i z osi.

Primer 3.

Ravan 2x+3y +6z - 12 =0 prebaciti u segmentni oblik i skicirati je.

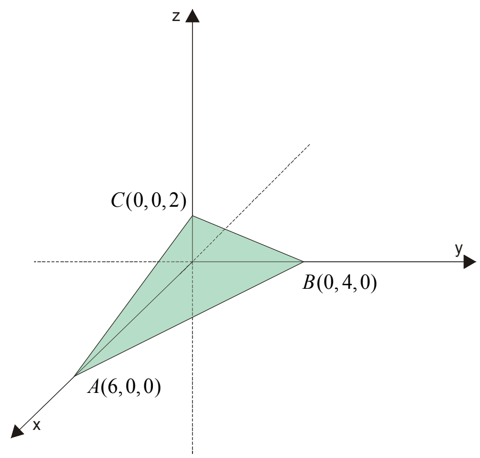
Rešenje:

$2x+3y+6z-12=0$ Kako na desnoj strani mora biti 1, radimo sledeće:

$2x+3y+6z=12$...................../ :12

$$\frac{2x}{12}+\frac{3y}{12}+\frac{6z}{12}=1$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1$$



Primer 4.

a) Odrediti jednačinu ravni koja sadrži koordinatni početak
b) Odrediti jednačinu ravni koja je paralelna sa Oz osom
c) Odrediti jednačinu ravni koja je paralelna sa Oxy ravni

<u>Rešenje</u>

a) Kako koordinatni početak sadrži tačku O(0,0,0) , njene koordinate možemo zameniti u opštu jednačinu ravni:

Ax+By+Cz+D=0

$A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \rightarrow D=0$

Dakle, tražena jednačina te ravni je Ax+By+Cz = 0

b) Ako je ravan paralelna sa Oz osom , onda je u vektoru normalnosti te ravni $\vec{n}=(A,B,C)$ sigurno **C=0,** to jest , on je $\vec{n}=(A,B,0)$ pa je ravan Ax+By+D= 0

c) Ako je ravan paralelna sa Oxy ravni onda je A=0 i B= 0, pa je ravan

Ax+By+Cz+D=0
Cz+D=0
Cz = - D
$z=-\frac{D}{C}$ Naravno, ravan z = 0 je ustvari baš Oxy ravan.

Rastojanje tačke $M_0(x_0,y_0,z_0)$ od ravni Ax+By+Cz+d = 0 se računa po formuli:

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Naravno, apsolutna vrednost nam obezbedjuje da to rastojanje ne bude negativno.

Primer 5.

Odrediti rastojanje tačke A(1,-1,3) od ravni 2x-3y+2z – 4 = 0

Rešenje

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

$$d=\left|\frac{2\cdot 1-3\cdot(-1)+2\cdot 3-4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}\right|$$

$$d=\left|\frac{2+3+6-4}{\sqrt{4+9+1}}\right|$$

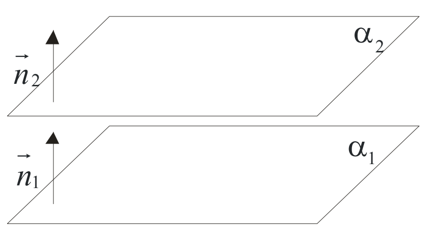
$$d=\left|\frac{7}{\sqrt{14}}\right|=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

Kakav može biti uzajamni položaj dve ravni?

Posmatrajmo dve ravni $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ i $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Naravno, njihovi vektori normalnosti su $\overrightarrow{n_1}(A_1,B_1,C_1)$ i $\overrightarrow{n_2}(A_2,B_2,C_2)$.

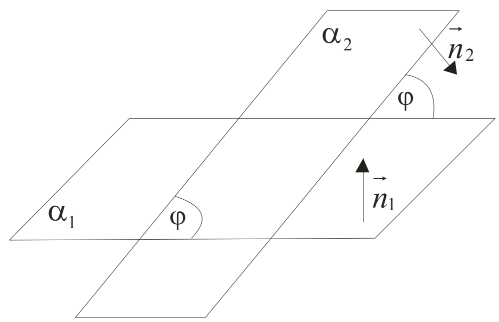
i) Ravni su **paralelne** samo ako su njihovi vektori normalnosti kolinearni .(Često se u zadacima uzima da one imaju isti vektor onda)



Uslov paralelnosti bi bio $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=0$ ili $\overrightarrow{n_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{n_2}$ (kolinearni, linearno zavisni) ili

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}$$

ii) Ako ravni nisu paralelne , onda se one seku pod nekim uglom .

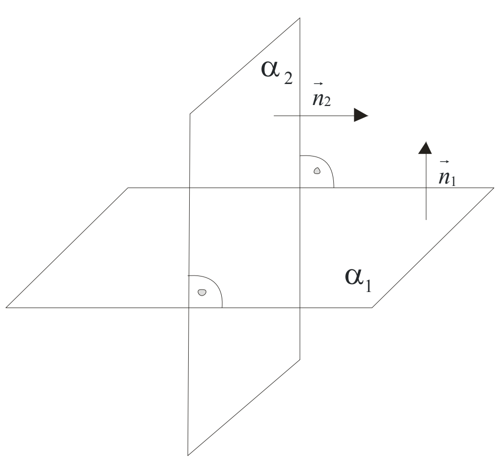


Ugao izmedju dveju ravni je ugao izmedju njihovih normalnih vektora .

Koristeći skalarni proizvod (pogledaj taj fajl) , ugao odredjujemo po formuli:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Specijalni slučaj je kada se ravni seku pod pravim uglom:



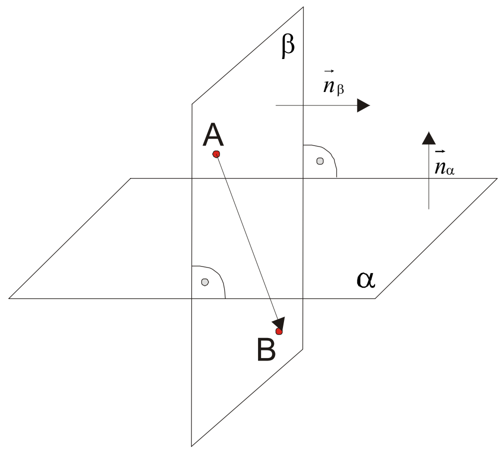
Onda važi da je $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0$

Primer 6.

Odrediti jednačinu ravni koja prolazi kroz tačke A(2,3,1) i B(-1,2,-2) i normalna je na ravan α : 2x-3y+z-5=0

Rešenje

Najpre da postavimo zadatak.



Označimo traženu ravan sa β.

Tačke A i B pripadaju toj ravni i formiraju vektor $\overrightarrow{AB} = (-1-2, 2-3, -2-1) = (-3,-1,-3)$

Ovaj vektor $\overrightarrow{AB}$ je normalan na vektor normalnosti $\overrightarrow{n_\beta}$ ravni β. A kako u zadatku kaže da su ove dve ravni normalne, onda je i $\overrightarrow{n_\beta}$ normalno na $\overrightarrow{n_\alpha}$. Dakle: $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$, a ovo nam govori (pogledaj fajl vektori u prostoru) da traženi vektor $\overrightarrow{n_\beta}$ možemo naći pomoću vektorskog proizvoda!

$$\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(9+1) - \vec{j}(-6+3) + \vec{k}(-2-9) = 10\vec{i} + 3\vec{j} - 11\vec{k} = (10,3,-11)$$

Dalje koristimo jednačinu ravni kroz jednu tačku (sve jedno je dal ćemo uzeti tačku A ili tačku B)

Uzmimo recimo tačku A(2,3,1)

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$
$$10(x-2)+3(y-3)-11(z-1)=0$$
$$10x-20+3y-9-11z+11=0$$
$$10x+3y-11z-18=0$$

I dobili smo traženu ravan.

Skup svih ravni koje sadrže datu pravu p je **pramen ravni**.

Jednačina pramena je data preko dve prave koje pripadaju pramenu i parametra:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Primer 7.

U pramenu ravni odredjenom ravnima 3x+y+z-5=0 i x-y-z+2=0 naći ravan koja je normalna na prvu od datih ravni.

Rešenje

Oformimo najpre pramen :

$3x + y + z - 5 + \lambda(x - y - z + 2) = 0$

Sredimo ovo da nadjemo vektor normalnosti tog pramena...(sve uz x, pa uz y, pa uz z...)

$3x + y + z - 5 + \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda 2 = 0$

$(3 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 - \lambda)z + 2\lambda - 5 = 0$

Odavde je $\overrightarrow{n_{PR}} = (3 + \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda)$

Za prvu ravan $3x + y + z - 5 = 0$ vektor normalnosti je $\overrightarrow{n_I} = (3,1,1)$

Iskoristimo uslov normalnosti: $\overrightarrow{n_I} \cdot \overrightarrow{n_{PR}} = 0$

$(3,1,1) \cdot (3 + \lambda, 1 - \lambda, 1 - \lambda) = 0$

$3(3 + \lambda) + 1(1 - \lambda) + 1(1 - \lambda) = 0$

$9 + 3\lambda + 1 - \lambda + 1 - \lambda = 0$

$\boxed{\lambda = -11}$

Vratimo se sada u pramen i zamenimo dobijenu vrednost:

$3x + y + z - 5 + \lambda(x - y - z + 2) = 0$

$3x + y + z - 5 - 11(x - y - z + 2) = 0$

$3x + y + z - 5 - 11x + 11y + 11z - 22 = 0$

$\boxed{-8x + 12y + 12z - 27 = 0}$ je rešenje!