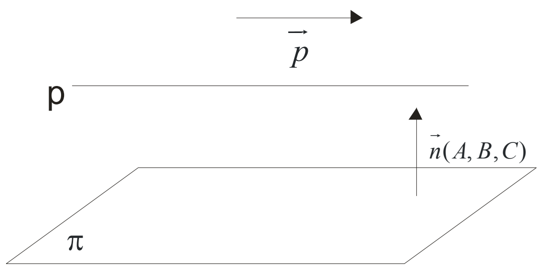
PRAVA I RAVAN

Kakav može biti međusobni položaj prave i ravni ?

Posmatrajmo pravu $p: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ i ravan $\pi: Ax+By+Cz+D=0$

Naravno, znamo da je vektor pravca prave $\vec{p}=(l,m,n)$ a vektor normalnosti ravni $\vec{n}=(A,B,C)$

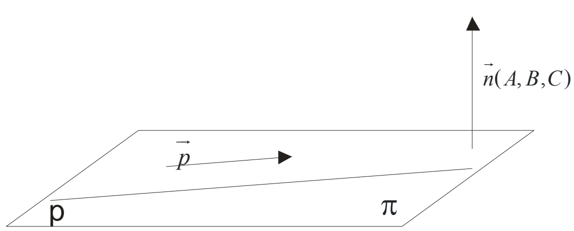
i) Prava i ravan su paralelni



Ovde su vektori $\vec{p}=(l,m,n)$ i $\vec{n}=(A,B,C)$ medjusobno normalni , pa je :

$\vec{n}\cdot\vec{p}=0 \rightarrow Al+Bm+Cn=0$

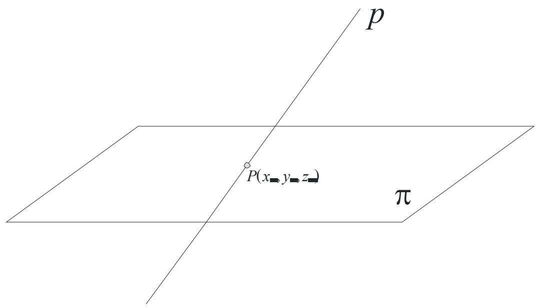
ii) Prava *p* leži u ravni π



Ovde mora da važe dva uslova :

Prvo da kao kod paralelnosti bude $Al+Bm+Cn=0$ a onda i da je $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, što znači da tačka koja pripada pravoj pripada i ravni.

iii) Prava prodire ravan



Ako prava p prodire ravan π onda je $Al + Bm + Cn \neq 0$, to jest vektori pravca prave i vektor normalnosti ravni nisu medjusobno normalni.

Primer 1.

Nađi prodor prave $p: \ \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$ kroz ravan $\alpha: \ 2x - 4y - z - 2 = 0$

Rešenje:

Najpre ćemo pravu prebaciti u parametarski oblik

$$p: \ \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-5}{-1} = t \rightarrow \frac{x+3}{2} = t \wedge \frac{y-2}{-4} = t \wedge \frac{z-5}{-1} = t$$

$x = 2t - 3$

$y = -4t + 2$

$z = -t + 5$

Sad ovo zamenimo u jednačinu ravni:

$2x - 4y - z - 2 = 0$

$2(2t-3) - 4(-4t+2) - (-t+5) - 2 = 0$

$4t - 6 + 16t - 8 + t - 5 - 2 = 0$

$21t = 21 \rightarrow t = 1$

Vratimo t=1 u x,y i z

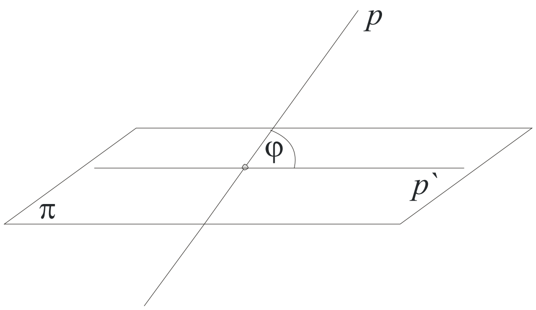
$x = 2t - 3 \rightarrow x = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \rightarrow x = -1$

$y = -4t + 2 \rightarrow y = -4 \cdot 1 + 2 = -2 \rightarrow y = -2$

$z = -t + 5 \rightarrow z = -1 + 5 = 4 \rightarrow z = 4$

Dakle, tačka prodora je $P(-1, -2, 4)$

Ugao izmedju prave i ravni je oštar ugao izmedju prave i njene normalne projekcije na ravan.



Ako je vektor pravca prave $\vec{p}=(l,m,n)$ a vektor normalnosti ravni $\vec{n}=(A,B,C)$ onda je :

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{p}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{p}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|Al+Bm+Cn\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Specijalno,prava je normalna na ravan ako su vektori $\vec{p}=(l,m,n)$ i $\vec{n}=(A,B,C)$ kolinearni, to jest $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

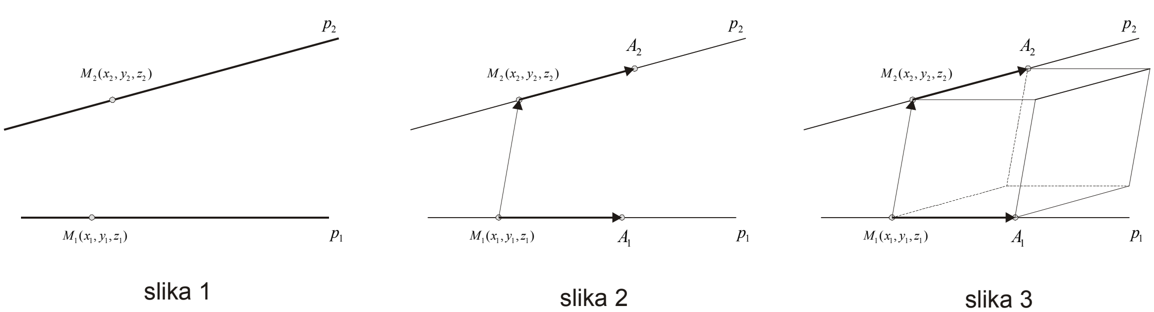
Kako odrediti rastojanje neke tačke od prave?

Ako to rastojanje obeležimo sa ***d*** , a tražimo rastojanje tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ od prave $p:\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$,

onda to rastojanje računamo po formuli $d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{p}\right|}{\left|\vec{p}\right|}$

Kako odrediti najkraće rastojanje izmedju pravih ?

Neka su nam date prave : $p_1:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ i $p_2:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$



Najpre iz datih jednačina pročitamo tačke $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i $M_2(x_2,y_2,z_2)$. (slika 1.)

Zatim oformimo vektore $\overrightarrow{M_1A_1}=\overrightarrow{p_1}=(l_1,m_1,n_1)$, $\overrightarrow{M_2A_2}=\overrightarrow{p_2}=(l_2,m_2,n_2)$ i $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ (slika 2.)

Nad ovim vektorima konstruišemo paralelopiped! Visina tog paralelopipeda , povučena iz tačke $M_2(x_2,y_2,z_2)$ je ustvari najkraće rastojanje izmedju ovih prava. (slika 3.)

To jest : $$\boxed{d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2})\right|}{\left|\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}\right|}}$$

Primer 2.

Nadji najkraće rastojanje izmedju pravih $p_1:\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$ i $p_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$

Rešenje:

Iz datih jednačina ćemo najpre pročitati tačke i vektore pravaca datih pravih...

$$p_1:\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}\rightarrow M_1(0,0,1)\wedge\overrightarrow{p_1}=(2,3,1)$$

$$p_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}\rightarrow M_2(-1,2,1)\wedge\overrightarrow{p_2}=(2,1,-1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=(-1-0,2-0,1-1)=(-1,2,0)$$

$$\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-4\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}=(-4,4,-4)$$

$$\left|\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{16\cdot 3}=4\sqrt{3}$$

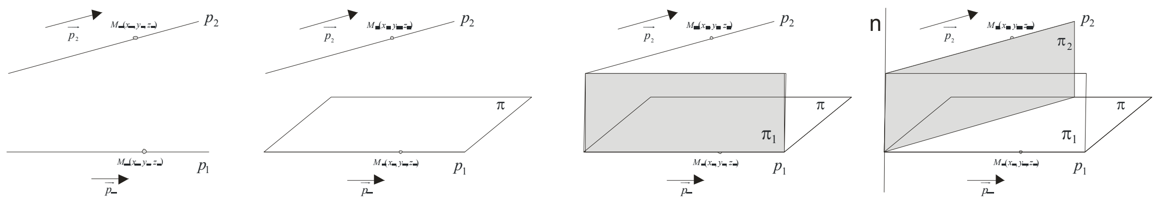
$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2})=(-1,2,0)\cdot(-4,4,-4)=4+8-0=12$$

Sad iskoristimo formulu:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2})\right|}{\left|\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}\right|}=\frac{12}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

Kako odrediti zajedničku normalu za dve mimoilazne prave?

Neka su nam date prave $p_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ i $p_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$



slika 1 slika 2 slika 3 slika 4

Najpre uočimo njihove tačke i vektore pravaca (slika 1.)

Uočimo ravan π koja sadrži pravu p_1 i paralelna je sa pravom p_2. Vektor normalnosti ove ravni π ćemo naći preko

$\vec{n}(A,B,C)=\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}$ (slika 2.)

Dalje postavimo ravan π_1 koja sadrži pravu p_1 i normalna je na ravan π (slika 3.)

Jednačinu ove ravni ćemo naći preko : $\pi_1: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A & B & C \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0$

Dalje postavimo ravan π_2 koja sadrži pravu p_2 i normalna je na ravan π (slika 4.)

Slično kao malopre, jednačinu ravni π_2 tražimo $\pi_2: \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ A & B & C \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

Presek ove dve ravni daje pravu koja je zajednička normala za dve date prave!

Primer 3.

Napisati jednačinu zajedničke normale pravih : $p_1: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ i $p_2: \dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$

Rešenje:

Najpre odavde pročitamo tačke i vektore pravaca...

$$p_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}\rightarrow M_1(1,0,0)\wedge\overrightarrow{p_1}=(-1,2,1)$$

$p_2: \ \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2} \to M_2(0,0,0) \wedge \overrightarrow{p_2}=(0,1,2)$

Dalje tražimo $\vec{n}(A,B,C)=\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}$

$$\vec{n}(A,B,C)=\overrightarrow{p_1}\times\overrightarrow{p_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(3,2,-1)$$

Tražimo ravan π_1:

$$\pi_1: \ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A & B & C \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0 \to \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \to 2x-y+4z-2=0$$

Tražimo ravan π_2:

$$\pi_2: \ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ A & B & C \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \to \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \to 5x-6y+3z=0$$

Jednačina tražene normale je $n: \ \{ \begin{array}{l} 2x-y+4z-2=0 \\ 5x-6y+3z=0 \end{array}$

Naravno, ova prava je data kao presek dve ravni, ako od vas traže u zadatku, lako će te je prebaciti u neki od drugih oblika...