Tablica limesa – upotreba u zadacima

Pisali ste nam da na nekim fakultetima traže da se limesi rešavaju bez upotrebe Lopitalovog pravila.

Evo tutorijala vezanog za to.

Tablica limesa (poznati limesi u interpretaciji nekih profesora) izgleda:

Tablica limesa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a \quad (a\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=0 \quad (p\in\mathbb{R},\ a>1)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_n} & \text{kada je } m=n\\ 0 & \text{kada je } m<n\\ \pm\infty & \text{kada je } m>n\end{cases}$$

$$(m,n\in\mathbb{N}_0,\quad a_0,\ldots,a_m,b_0,\ldots,b_n\in\mathbb{R},\quad a_m,b_n\neq 0)$$

Naravno, varijacije na temu su:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\to\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1\to\lim_{x\to 0}\frac{\sin^n f(x)}{\left(f(x)\right)^n}=1$$

ili

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\to\lim_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,\quad \text{gde}\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=0$$

I tako za svaki od limesa iz tablice. Recimo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\to\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$$

ili

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\to\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1,\quad \text{gde}\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=0$$

itd.

Primena racionalizacije i limesa $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$, $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$ je već objašnjena u prethodnim fajlovima,

jer se to gradivo radi i u srednjoj školi.

U ovom tutorijalu ćemo objasniti upotrebu ostalih poznatih limesa.

Napre da dopunimo trik sa racionalizacijom, u situaciji kad nisu isti koreni u pitanju.

Primer 1.

Izračunati $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$.

Rešenje:

Ako zamenimo da x teži 0, dobijamo neodredjen izraz $\frac{0}{0}$.

Problem je što imamo različite korene u brojiocu ovog razlomka!

Upotrebimo **trik sa dodavanjem i oduzimanjem nekog broja (najčešće je to 1) .**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)-\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{x}$$

Sad ovo radimo kao dva limesa i racionališemo svaki posebno:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)-\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{x}\cdot\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}^2-1^2\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1^3\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}-\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Primer 2.

Izračunati $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[4]{x+3}-\sqrt[3]{5-x^2}}{x^2-4}$.

Rešenje:

Naše trikče:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)-\left(\sqrt[3]{5-x^2}-1\right)}{x^2-4}=$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)}{x^2-4}-\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[3]{5-x^2}-1\right)}{x^2-4}$$

Kako je uopšteno $A^n-1=(A-1)(A^{n-1}+A^{n-2}+\ldots+A+1)$

Za našu situaciju imamo:

$A^4-1=(A-1)(A^3+A^2+A+1)$ odnosno $A^3-1=(A-1)(A^2+A+1)$ pa je :

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)}{x^2-4}-\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[3]{5-x^2}-1\right)}{x^2-4}=$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)}{x^2-4}\cdot\frac{\left(\left(\sqrt[4]{x+3}\right)^3+\left(\sqrt[4]{x+3}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x+3}\right)+1\right)}{\left(\left(\sqrt[4]{x+3}\right)^3+\left(\sqrt[4]{x+3}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x+3}\right)+1\right)}-\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[3]{5-x^2}-1\right)}{x^2-4}\cdot\frac{\left(\left(\sqrt[3]{5-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{5-x^2}+1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{5-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{5-x^2}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[4]{x+3}^{\,4}-1^4\right)}{(x^2-4)\underbrace{\boxed{\left(\left(\sqrt[4]{x+3}\right)^3+\left(\sqrt[4]{x+3}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x+3}\right)+1\right)}}_{ovo\ sve\ daje\ 4}}-\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[3]{5-x^2}^{\,3}-1^3\right)}{(x^2-4)\underbrace{\boxed{\left(\left(\sqrt[3]{5-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{5-x^2}+1\right)}}_{ovo\ sve\ daje\ 3}}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)\cdot 4}-\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{(x^2-4)\cdot 3}$$
$$=\frac{1}{-16}+\frac{1}{3}=\frac{13}{48}$$

Dalje obradjujemo

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1} \to \lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1 \text{ to jest } \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a} \to \lim_{x\to 0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a$$

Primer 3.

Izračunati

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin 3x}}{tg2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\sin 5x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-e^{x^2}}{1-\cos 2x}$

Rešenje:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\frac{2}{3}\cdot 3x}=\frac{3}{2}\underbrace{\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}}}_{\text{ovo daje 1}}=\frac{3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin 3x}}{tg2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{tg2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x\cdot\frac{tg2x}{\sin 3x}}=-\lim_{x\to 0}\underbrace{\boxed{\frac{e^{\sin 3x}-1}{\sin 3x}}}_{\text{ovo je 1}}\frac{\sin 3x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}\cdot\cos 2x=-\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\boxed{\frac{\sin 3x}{3x}}}{2\cdot\boxed{\frac{\sin 2x}{2x}}}\cdot\cos 2x=-\frac{3}{2}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{\frac{2x}{2x}\cdot\boxed{\frac{\sin 5x}{5x}}\cdot 5x}=\lim_{x\to 0}\boxed{\frac{3^{2x}-1}{2x}}\frac{1}{\frac{5x}{2x}}=\ln 3\cdot\frac{2}{5}$$

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-e^{x^2}}{1-\cos 2x}=\text{trik sa dodavanjem jedinica i formulica } 1-\cos 2x=2\sin^2 x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-e^{x^2}}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-1}{2\sin^2 x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-1}{2\cdot x^2\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}}}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2x^2\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-1}{x^2}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\ln 3-1)$$

Sledeći limes koji objašnjavamo je (u kombinaciji sa već naučenim trikovima):

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}\to\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1$$

Primer 4.

Izračunati:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+12x)}{x}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^2)}{\sin^2 3x}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\ln(1-x)}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-\sin 2x\cdot tg3x}-1}{\ln(1+5x^2)}$

Rešenja:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+12x)}{x}=\text{fali nam } 12=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+12x)}{12x}\cdot 12=\underbrace{\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+12x)}{12x}}}_{\text{ovo je 1}}\cdot 12=12$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^2)}{\sin^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2}\cdot 4x^2}{\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\cdot(3x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{\frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2}}\cdot 4x^2}{\boxed{\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}}\cdot(3x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{9x^2}=\frac{4}{9}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\ln(1-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{\ln(1+(-x))}{-x}\cdot(-x)}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)+1}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{\boxed{\frac{\ln(1+(-x))}{-x}}\cdot(-x)\cdot\underbrace{\left(\boxed{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)+1}\right)}_{\text{ovo daje 3}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-3x}=-\frac{1}{3}$$

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-\sin 2x\cdot tg3x}-1}{\ln(1+5x^2)}$$

Ovo je već ozbiljniji primer.

Dole u imeniocu pravimo poznati limes a zbog brojioca moramo da racinališemo....

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-\sin 2x\cdot tg3x}-1}{\boxed{\frac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}}\cdot 5x^2}\cdot\frac{\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^3}+\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^2}+\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^1}+1}{\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^3}+\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^2}+\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^1}+1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x\cdot tg3x-1}{5x^2\cdot\left(\underbrace{\boxed{\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^3}+\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^2}+\sqrt[4]{(1-\sin 2x\cdot tg3x)^1}+1}}_{\text{ovo daje 4}}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x\cdot tg3x}{20x^2}=-\frac{1}{20}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 3x}{x^2\cdot\underbrace{\boxed{\cos 3x}}_{\text{ovo je 1}}}=-\frac{1}{20}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{x^2}=$$

$$-\frac{1}{20}\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\boxed{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot 6x^2}{x^2}=-\frac{6}{20}=-\frac{3}{10}$$

Dakle, ideja kod upotrebe poznatih limesa je da “napravimo” izgled poznatog limesa dodavanjem i oduzimanjem nekog broja ili pak delimo i množimo odredjenim izrazom.

Objasnili smo na nekoliko primera kako se to radi, a za ostale poznate limese je sličan postupak.

Odštampajte tablicu limesa, pa kad prepoznate na koji “liči” limes u zadatku, vršite ove dopune.