MATRICE ZADACI (III DEO)

SOPSTVENE VREDNOSTI I SOPSTVENI VEKTORI MATRICE

Postupak traženja **sopstvenih vrednosti** je sledeći:

i) Za datu kvadratnu matricu (recimo matricu A) odredimo matricu $A-\lambda I_n$, gde je I_n jedinična matrica . Znači, u datoj matrici po glavnoj dijagonali oduzmemo λ . **Ova matrica $A-\lambda I_n$ se naziva karakteristična matrica.**

ii) Tražimo vrednost determinante karakteristične matrice: $\boxed{\det(A-\lambda I)}$. Dobićemo polinom po λ . Taj polinom se obeležava sa $P_A(\lambda)$ **i naziva se karakteristični polinom matrice A.**

iii) Dobijeni polinom izjednačimo sa nulom: $P_A(\lambda)=0$ **. Ovo je karakteristična jednačina matrice A.** Rešenja ove jednačine su $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ (zavisno kog je karakteristična jednačina stepena, toliko će imati i rešenja...) i nazivaju se **sopstvene (karakteristične) vrednosti** matrice A.
Skup svih sopstvenih vrednosti matrice A nazivamo **spektar matrice A i obeležavamo ga sa $S_p(A)$.**

Primer 1.

Odrediti sopstvene vrednosti za matrice:

a) $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Rešenje:

a) $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Najpre formiramo matricu $A-\lambda I_2$, gde je $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jedinična matrica drugog reda.

$$A-\lambda I_2=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Dalje tražimo determinantu ove matrice:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda)+1=8-4\lambda-2\lambda+\lambda^2+1$$
$$\det(A-\lambda I)=\lambda^2-6\lambda+9$$

Dobili smo karakteristični polinom:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3$$

Rešavanjem karakteristične jednačine smo dobili sopstvene vrednosti: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3$. Vidimo da je ovde u pitanju dvostruka vrednost (nula drugog reda), jer su rešenja jednaka.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$
$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 0$$
$$= (1-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-1-\lambda) - 3] + 1 \cdot [3(-1-\lambda) + 6]$$
$$= (1-\lambda) \cdot [-2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 3] - 3 - 3\lambda + 6$$
$$= (1-\lambda) \cdot [\lambda^2 - \lambda - 5] - 3\lambda + 3$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 5 - \lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda - 3\lambda + 3$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$
$$= -\lambda^2(\lambda - 2) + 1(\lambda - 2)$$
$$= (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = (\lambda - 2)(1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

Kad ovo izjednačimo sa nulom dobijamo tri različite sopstvene vrednosti:
$$(\lambda - 2)(1 - \lambda)(1 + \lambda) = 0 \rightarrow \lambda - 2 = 0 \vee 1 - \lambda = 0 \vee 1 + \lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

Spektar matrice A je dakle: $S_p(A) = \{-1, 1, 2\}$

Postupak traženja **<u>sopstvenih vektora</u>** je sledeći:

i) **Pronadjemo sve sopstvene vrednosti, to jest spektar matrice** A

ii) **Za svaku sopstvenu vrednost posebno radimo sledeće:**

- λ **zamenimo u karakterističnu matricu** $A-\lambda I_n$

- **dobijena matrica je ustvari matrica homogenog sistema koji će uvek biti neodređen, odnosno imaće beskonačno mnogo rešenja.**

  Nađemo ta rešenja koja nam ustvari daju taj sopstveni vektor.

Malo je zeznuta situacija kad su nule karakterističnog polinoma dvostruke ili trostruke, pa ćemo mi na sledećem primeru pokušati da vam objasnimo sve tri situacije (naravno ako govorimo o matrici 3×3).

$\boxed{\text{Primer 2.}}$

Odrediti sopstvene vektore sledećih matrica:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

v) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

g) $A=\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

Rešenje:

a) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

Dakle, najpre tražimo sopstvene vrednosti:

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\to A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-1=1-2\lambda+\lambda^2-1=\lambda^2-2\lambda$$

$$P_A(\lambda)=\lambda^2-2\lambda$$
$$\lambda^2-2\lambda=0\to\quad \lambda_1=0,\quad \lambda_2=2$$

Dobili smo dve različite sopstvene vrednosti, sad ih vraćamo u karakterističnu matricu:

$\underline{\lambda_1=0}$

$$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix}1-0&1\\1&1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

Odavde pravimo homogen sistem i rešimo ga:

$$x+y=0$$
$$\underline{x+y=0}$$
$$x+y=0\to y=-x\to(x,y)=(x,-x)\quad x\in R$$

E sad, svaki profesor ima svoja obeležavanja...

Vi naravno radite kako vaš profesor zahteva, a mi smo naučili da sopstvene vektore izražavamo preko grčkog alfabeta...

$\boxed{\overrightarrow{x_1}=(\alpha,-\alpha)=\alpha(1,-1)}$ evo prvog sopstvenog vektora.

Vraćamo i drugu sopstvenu vrednost u karakterističnu matricu:

$\underline{\lambda_2=2}$

$$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix}1-2&1\\1&1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

Pravimo homogen sistem:

$$-x+y=0$$
$$\underline{x-y=0}$$
$$x=y \to (x,y)=(x,x) \quad x\in R$$

Odavde je drugi sopstveni vektor: $\boxed{\overrightarrow{x_2}=(\beta,\beta)=\beta(1,1)}$

b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \\ 3 & 1 \end{matrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)+3+3-1(1-\lambda)-1(1-\lambda)-9(5-\lambda)=$$
$$=-\lambda^3+7\lambda^2-36$$

Dobili smo karakterističnu jednačinu:

$$P_A(\lambda)=-\lambda^3+7\lambda^2-36$$
$$\lambda^3-7\lambda^2+36=0$$

Evo malog problema... Karakteristična jednačina je trećeg stepena, njene nule ćemo naći tako što posmatramo slobodan član, dakle 36 i brojeve sa kojima on može da se podeli: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

Redom ih menjamo u karakterističnu jednačinu dok ne dobijemo nulu . (podsetite se Bezuove teoreme).

Kod nas je to : $(-2)^3-7(-2)^2+36=-8-28+36=0 \to \boxed{\lambda=-2}$

Sad ceo karakteristični polinom delimo sa $(\lambda+2)$. Podsetite se deljenja polinoma. Imate kod nas na sajtu, fajl I godina.

$$(\lambda^3-7\lambda^2+36):(\lambda+2)=\lambda^2-9\lambda+18$$
$$\underline{\pm\lambda^3\pm2\lambda^2}$$
$$-9\lambda^2+36$$
$$\underline{\mp9\lambda^2\mp18\lambda}$$
$$18\lambda+36$$
$$\underline{\pm18\lambda\pm36}$$

$$\lambda^2-9\lambda+18=0\rightarrow\boxed{\lambda=6},\boxed{\lambda=3}$$

$$S_p(A)=\{-2,3,6\}$$

Imamo tri različite sopstvene vrednosti, pa za svaku posebno:

$\underline{za\quad \lambda_1=-2}$

$$A-(-2)I=\begin{bmatrix}1-(-2) & 1 & 3\\ 1 & 5-(-2) & 1\\ 3 & 1 & 1-(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&3\\1&7&1\\3&1&3\end{bmatrix}$$

$$3x+y+3z=0$$
$$1x+7y+1z=0$$
$$\underline{3x+y+3z=0}$$
$$3x+y+3z=0$$
$$\underline{1x+7y+1z=0}...../\cdot 3$$
$$3x+y+3z=0$$
$$\underline{3x+21y+3z=0}$$
$$y=0\rightarrow 3x+3z=0\rightarrow z=-x$$
$$(x,y,z)=(x,0,-x)\qquad x\in R$$
$$\boxed{\overrightarrow{x_1}=(\alpha,0,-\alpha)=\alpha(1,0,-1)}$$

$\underline{za\quad \lambda_2=3}$

$$A-3I=\begin{bmatrix}1-3&1&3\\1&5-3&1\\3&1&1-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&3\\1&2&1\\3&1&-2\end{bmatrix}\sim Ivrsta\ i\ II\ vrsta\ zamene\ mesta\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\-2&1&3\\3&1&-2\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{matrix}Ivrsta\cdot 2+IIvrsta\rightarrow IIvrsta\\ Ivrsta\cdot(-3)+IIIvrsta\rightarrow IIIvrsta\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&5&5\\0&-5&-5\end{bmatrix}\sim IIvrsta+IIIvrsta\rightarrow IIIvrsta\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&5&5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Kao što vidite, moramo da znamo i rad sa matricama da bi lakše rešili dobijeni homogeni sistem.

Iz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ napravimo sistem:

$x+2y+z=0$

$\underline{5y+5z=0} \rightarrow \boxed{y=-z}$

$x+2y+z=0 \rightarrow x-2z+z=0 \rightarrow \boxed{x=z}$

$(x,y,z)=(z,-z,z) \quad z\in R$

$\boxed{\overrightarrow{x_2}=(\beta,-\beta,\beta)=\beta(1,-1,1)}$

$\underline{za \quad \lambda_3=6}$

$$A-6I=\begin{bmatrix} 1-6 & 1 & 3 \\ 1 & 5-6 & 1 \\ 3 & 1 & 1-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim Ivrsta\ i\ II\ vrsta\ zamene\ mesta \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} Ivrsta\cdot 5+IIvrsta \rightarrow IIvrsta \\ Ivrsta\cdot(-3)+IIIvrsta \rightarrow IIIvrsta \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \sim IIvrsta+IIIvrsta \rightarrow IIIvrsta$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x-y+z=0$

$\underline{-4y+8z=0} \rightarrow \boxed{y=2z}$

$x-y+z=0 \rightarrow x-2z+z=0 \rightarrow \boxed{x=z}$

$(x,y,z)=(z,2z,z)$

$\boxed{\overrightarrow{x_3}=(\gamma,2\gamma,\gamma)=\gamma(1,2,1)}$

v) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \\ 1 & 2 \end{matrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda)+4+4-4(1-\lambda)-4(1-\lambda)-(4-\lambda)=$$

$$=(1-2\lambda+\lambda^2)(4-\lambda)+8-4+4\lambda-4+4\lambda-4+\lambda$$

$$=4-\lambda-8\lambda+2\lambda^2+4\lambda^2-\lambda^3+9\lambda-4$$

$$=-\lambda^3+6\lambda^2=\lambda^2(6-\lambda)$$

$$\lambda^2(6-\lambda)=0 \to \lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=6$$

Sad imamo da je nula dvostruka sopstvena vrednost:

$\underline{za \quad \lambda=0}$

$$A-0\cdot I=\begin{bmatrix} 1-0 & 2 & 1 \\ 2 & 4-0 & 2 \\ 1 & 2 & 1-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x+2y+z=0$$
$$2x+4y+2z=0$$
$$\underline{x+2y+z=0}$$
$$x+2y+z=0 \to x=-2y-z$$

$(x,y,z)=(-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$ gde je $\alpha,\beta\in R$

Ako uzmemo da je $\beta=0 \to (-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)=(-2\alpha,\alpha,0)=\alpha(-2,1,0)$

Ako uzmemo da je $\alpha=0 \to (-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)=(-\beta,0,\beta)=\beta(-1,0,1)$

$$(-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)=\alpha(-2,1,0)+\beta(-1,0,1)$$

$$\overrightarrow{x_1}=(-2,1,0) \ \wedge \ \overrightarrow{x_2}=(-1,0,1)$$

$\underline{za \quad \lambda=6}$

$$A-6I=\begin{bmatrix} 1-6 & 2 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 2 & 1-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}\sim Ivrsta \rightleftarrows IIIvrsta \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} IIvrsta+Ivrsta\cdot(-2)\to IIvrsta \\ IIIvrsta+Ivrsta\cdot 5\to IIIvrsta \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & -24 \end{bmatrix} \sim IIIvrsta+IIvrsta\cdot 2\to IIIvrsta \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x+2y-5z=0$$
$$\underline{-6y+12z=0} \to \boxed{y=2z}$$
$$x+2y-5z=0 \to x+2\cdot 2z-5z=0 \to \boxed{x=z}$$

$(x,y,z)=(z,2z,z) \qquad z\in R$

$$\overrightarrow{x_3}=(\gamma,2\gamma,\gamma)=\gamma(1,2,1)$$

g) $A=\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}5-\lambda & 6 & -3\\ -1 & 0-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-\lambda & 6 & -3\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 6 & -3\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 6 & -3\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\begin{matrix}5-\lambda & 6\\ -1 & -\lambda\\ 1 & 2\end{matrix}=-\lambda(5-\lambda)(1-\lambda)+6+6+6(1-\lambda)-2(5-\lambda)-3\lambda$$

$$=-\lambda(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2)+12+6-6\lambda-10+2\lambda-3\lambda$$

$$=-5\lambda+6\lambda^2-\lambda^3+8-7\lambda$$

$$=-\lambda^3+6\lambda^2-5\lambda+8=(2-\lambda)^3$$

$$(2-\lambda)^3=0\rightarrow\boxed{\lambda=2}$$

Evo situacije gde imamo trostruku sopstvenu vrednost:

$\underline{\lambda=2}$

$$A-2I=\begin{bmatrix}5-2 & 6 & -3\\ -1 & 0-2 & 1\\ 1 & 2 & 1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & -3\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$3x+6y-3z=0$

$-x-2y+z=0$

$\underline{x+2y-z=0}$

$x+2y-z=0\rightarrow z=x+2y\rightarrow(x,y,z)=(x,y,x+2y);\quad x,y\in R$

$(\alpha,\beta,\alpha+2\beta)$

$\alpha=0\rightarrow(\alpha,\beta,\alpha+2\beta)=(0,\beta,2\beta)=\beta(0,1,2)$

$\beta=0\rightarrow(\alpha,\beta,\alpha+2\beta)=(\alpha,0,\alpha)=\alpha(1,0,1)$

$\vec{x}=(\alpha,\beta,\alpha+2\beta)=\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,2)$

$\overrightarrow{x_1}=(1,0,1)$

$\overrightarrow{x_2}=(0,1,2)$

$\overrightarrow{x_3}=(1,1,3)$ za recimo $\alpha=1\wedge\beta=1$

I još nam ostaje da pokušamo da vam objasnimo kako se traži matrica A^n uz pomoć sopstvenih vektora.

U fajlu matrice zadaci (I deo) smo tražili matricu A^n na dva načina: logički i to dokazivali matematičkom indukcijom i preko binomne formule. Videli smo da na ova dva načina radimo kad su u pitanju specifične matrice.

Rad sa sopstvenim vektorima zahteva mnogo posla...

$\boxed{\text{Primer 3.}}$

Data je matrica $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{bmatrix}$**. Izračunati** A^n, **gde je** $n\in N$

Kao što rekosmo, prvo treba naći sopstvene vrednosti i sopstvene vektore.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&3\\1&5-\lambda&1\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\text{posle sredjivanja }=(\lambda+2)(3-\lambda)(\lambda-6)$$

$$(\lambda+2)(3-\lambda)(\lambda-6)=0\rightarrow\lambda_1=-2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6$$

$\underline{za\quad\lambda=-2}$

$$A-(-2)I=\begin{bmatrix}1+2&1&3\\1&5+2&1\\3&1&1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&3\\1&7&1\\3&1&3\end{bmatrix}\sim Ivrsta\rightleftarrows IIvrsta\sim\begin{bmatrix}1&7&1\\3&1&3\\3&1&3\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{matrix}IIvrsta+Ivrsta\cdot(-3)\rightarrow IIvrsta\\IIIvrsta+Ivrsta\cdot(-3)\rightarrow IIIvrsta\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&1\\0&-20&0\\0&-20&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&1\\0&-20&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$x+7y+z=0$$

$$\underline{-20y=0}\rightarrow\boxed{y=0}$$

$$x+7y+z=0\rightarrow x+z=0\rightarrow\boxed{z=-x}$$

$$(x,y,z)=(x,0,-x),\quad x\in R$$

$$\overrightarrow{x_1}=(\alpha,0,-\alpha)=\alpha(1,0,-1)\rightarrow\quad\text{za }\alpha=1\text{ je}\boxed{\overrightarrow{x_1}=(1,0,-1)}$$

$\underline{za \quad \lambda = 3}$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 3 \\ 1 & 5-3 & 1 \\ 3 & 1 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} Ivrsta \rightleftarrows IIvrsta \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} IIvrsta + Ivrsta \cdot 2 \to IIvrsta \\ IIIvrsta + Ivrsta \cdot (-3) \to IIIvrsta \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \sim IIIvrsta + IIvrsta \to IIIvrsta \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x + 2y + z = 0$

$\underline{5y + 5z = 0} \to y + z = 0 \to \boxed{y = -z}$

$x + 2y + z = 0 \to x - 2z + z = 0 \to \boxed{x = z}$

$(x, y, z) = (z, -z, z) \quad z \in R$

$\overrightarrow{x_2} = (\beta, -\beta, \beta) = \beta(1, -1, 1) \to$ za $\beta = 1$ je $\boxed{\overrightarrow{x_2} = (1, -1, 1)}$

$\underline{za \quad \lambda = 6}$

$$A - 6I = \begin{bmatrix} 1-6 & 1 & 3 \\ 1 & 5-6 & 1 \\ 3 & 1 & 1-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim Ivrsta \rightleftarrows IIvrsta \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} IIvrsta + Ivrsta \cdot 5 \to IIvrsta \\ IIIvrsta + Ivrsta \cdot (-3) \to IIIvrsta \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \sim IIIvrsta + IIvrsta \to IIIvrsta \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x - y + z = 0$

$\underline{-4y + 8z = 0} \to \boxed{y = 2z}$

$x - y + z = 0 \to x - 2z + z = 0 \to \boxed{x = z}$

$(x, y, z) = (z, 2z, z) \quad z \in R$

$\overrightarrow{x_3} = (\gamma, 2\gamma, \gamma) = \gamma(1, 2, 1) \to$ za γ=1 je $\boxed{\overrightarrow{x_3} = (1, 2, 1)}$

Našli smo sopstvene vektore, i izabrali proizvoljne vrednosti za α, β i γ. Najčešće se uzima jedinica ali može i neki drugi broj.

Formiramo matricu *S* tako što sopstvene vektore naredjamo po kolonama:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Šta je ovde ideja?

Pravimo dijagonalnu matricu **D**:

$D=S^{-1}\cdot A\cdot S$, ako je kvadriramo , dobijamo:

$$D=S^{-1}\cdot A\cdot S\to D^2=(S^{-1}\cdot A\cdot S)^2=(S^{-1}\cdot A\cdot S)(S^{-1}\cdot A\cdot S)=S^{-1}\cdot A\cdot\boxed{S\cdot S^{-1}}\cdot A\cdot S$$
$$\to\boxed{D^2=S^{-1}\cdot A^2\cdot S}$$

Dalje bi bilo:

$$D^3=D^2\cdot D=S^{-1}\cdot A^2\cdot\boxed{S\cdot S^{-1}}\cdot A\cdot S\to\boxed{D^3=S^{-1}\cdot A^3\cdot S}$$

Zaključujemo da je : $\boxed{D^n=S^{-1}\cdot A^n\cdot S}$

Odavde će biti:

$D^n=S^{-1}\cdot A^n\cdot S$ množimo sa leva sa S

$S\cdot D^n=\boxed{S\cdot S^{-1}}\cdot A^n\cdot S$

$S\cdot D^n=A^n\cdot S$ množimo sa desna sa S^{-1}

$S\cdot D^n\cdot S^{-1}=A^n\cdot\boxed{S\cdot S^{-1}}$

$S\cdot D^n\cdot S^{-1}=A^n$

$\boxed{A^n=S\cdot D^n\cdot S^{-1}}$

Pa da krenemo polako na posao: $S^{-1}=\dfrac{1}{\det S}adjS$

$$S=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\det S=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\-1&1&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$S=\begin{bmatrix}\boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1}\\ \boxed{0} & -1 & 2\\ \boxed{-1} & 1 & 1\end{bmatrix}\to S_{11}=-3\quad S=\begin{bmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{2}\\ \boxed{-1} & 1 & 1\end{bmatrix}\to S_{21}=0\quad S=\begin{bmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ \boxed{0} & -1 & 2\\ \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1}\end{bmatrix}\to S_{31}=3$$

$$S=\begin{bmatrix}\boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1}\\ 0 & \boxed{-1} & 2\\ -1 & \boxed{1} & 1\end{bmatrix}\to S_{12}=-2\quad S=\begin{bmatrix}1 & \boxed{1} & 1\\ \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{2}\\ -1 & \boxed{1} & 1\end{bmatrix}\to S_{22}=2\quad S=\begin{bmatrix}1 & \boxed{1} & 1\\ 0 & \boxed{-1} & 2\\ \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1}\end{bmatrix}\to S_{32}=-2$$

$$S=\begin{bmatrix}\boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1}\\ 0 & -1 & \boxed{2}\\ -1 & 1 & \boxed{1}\end{bmatrix}\to S_{13}=-1\quad S=\begin{bmatrix}1 & 1 & \boxed{1}\\ \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{2}\\ -1 & 1 & \boxed{1}\end{bmatrix}\to S_{23}=-2\quad S=\begin{bmatrix}1 & 1 & \boxed{1}\\ 0 & -1 & \boxed{2}\\ \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{1}\end{bmatrix}\to S_{33}=-1$$

$$S^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-3 & 0 & -3\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}\to \boxed{S^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}}$$

Da nadjemo matricu *D*:

$$D=S^{-1}\cdot A\cdot S$$

$$D=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3 & 0 & -3\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-6 & 0 & 6\\ 6 & -6 & 6\\ 6 & 12 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{D=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}}$$

Jasno je da važi: $D=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\rightarrow D^n=\begin{bmatrix}(-2)^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 6^n\end{bmatrix}$

Rekosmo da je : $A^n=S\cdot D^n\cdot S^{-1}$

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 6^n\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^n=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 6^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^n=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3\cdot(-2)^n+2\cdot 3^n+6^n & -2\cdot 3^n+2\cdot 6^n & -3\cdot(-2)^n+2\cdot 3^n+6^n\\ -2\cdot 3^n+2\cdot 6^n & 2\cdot 3^n+4\cdot 6^n & -2\cdot 3^n+2\cdot 6^n\\ -3\cdot(-2)^n+2\cdot 3^n+6^n & -2\cdot 3^n+2\cdot 6^n & 3\cdot(-2)^n+2\cdot 3^n+6^n\end{bmatrix}}$$

I evo je tražena matrica A^n .

Još jednom vam napominjemo da će vaš profesor verovatno imati druga obeležavanja, pa vi ispoštujte njega a mi se nadamo da smo vam približili postupak.