Prsten i polje

Prsten i polje su strukture sa dve operacije.

<u>Prsten</u>

Neka je S neprazan skup i neka su $*$ i $\circ$ binarne operacije tog skupa.

Struktura $(S,*,\circ)$ je prsten ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- **i)** $(S,*)$ **je komutativna grupa**
- **ii)** $(S,\circ)$ **je semigrupa**
- **iii)** **Za svako** $x,y,z\in S$ **važe jednakosti** $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ **i** $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$ **to jest važi distributivni zakon**

Da ne dodje do zabune, često se umesto $*$ i $\circ$ stavlja $+$ i $\cdot$, to jest posmatra se struktura $(S,+,\cdot)$.

Pazite , $+$ i $\cdot$ jesu sabiranje i množenje ako se tako kaže u zadatku!

Primer 1.

Ispitati da li je struktura $(Z,+,\cdot)$ prsten, gde su $+$ i $\cdot$ operacije sabiranja i množenja na skupu celih brojeva Z.

Rešenje:

Ovde moramo dokazati sledeće :

- i) $(Z,+)$ je komutativna grupa
- ii) $(Z,\cdot)$ je semigrupa
- iii) Za svako $x,y,z\in Z$ važe jednakosti $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ i $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x)$ to jest važi distributivni zakon

$(Z,+)$ je komutativna grupa

- i) Sabiranje je zatvorena operacija na skupu Z , $\forall x,y\in Z\rightarrow x+y\in Z$
- ii) Važi asocijativnost $\forall x,y,z\in Z\rightarrow$ x+(y+z)=(x+y)+z
- iii) Neutral je 0
- iv) Inverzni element je – x jer x+(-x)=(-x)+x=0
- v) Važi komutativnost $\forall x,y\in Z\rightarrow$ x+y = y+x

$(Z,\cdot)$ je semigrupa

i) Množenje je zatrvorena operacija na Z $\forall x,y\in Z \to x\cdot y\in Z$
ii) Važi asocijativnost $\forall x,y,z\in Z \to x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

Već smo govorili da je operacija množenja distributivna u odnosu na operaciju sabiranja (ali ne važi obrnuto!)

Za svako $x,y,z\in Z$ važe jednakosti $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ i $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x)$

Dakle, **struktura** $(Z,+,\cdot)$ **jeste prsten!**

<u>Polje</u>

Neka je S neprazan skup i neka su $*$ i $\circ$ binarne operacije tog skupa.

Struktura $(S,*,\circ)$ je polje ako su ispunjeni sledeći uslovi:

i) $(S,*)$ **je komutativna grupa**
ii) $(S\setminus\{e\},\circ)$ **je komutativna grupa gde je e neutralni element grupe** $(S,*)$
iii) Za svako $x,y,z\in S$ **važi distributivni zakon**
$x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ **a zbog komutativnosti onda važi i** $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$

Primer 2.

Skup svih racionalnih brojeva je polje u odnosu na sabiranje i množenje.

Rešenje:

Dakle, trebamo dokazati da je $(Q,+,\cdot)$ polje.

i) $(Q,+)$ je komutativna grupa
ii) $(Q\setminus\{0\},\cdot)$ je komutativna grupa, 0 je neutral za $(Q,+)$
iii) Za svako $x,y,z\in Q$ važi $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$

$(Q,+)$ je komutativna grupa

i) Sabiranje je zatvorena operacija na skupu Q , $\forall x,y\in Q \to x+y\in Q$
ii) Važi asocijativnost $\forall x,y,z\in Q \to$ x+(y+z)=(x+y)+z
iii) Neutral je 0
iv) Inverzni element je – x jer x+(-x)=(-x)+x=0
v) Važi komutativnost $\forall x,y\in Q \to$ x+y = y+x

$(Q\setminus\{0\},\cdot)$ je komutativna grupa

i) Množenje je zatvorena operacija na skupu Q , $\forall x,y\in Q\rightarrow x\cdot y\in Q$

ii) Važi asocijativnost $\forall x,y,z\in Q\rightarrow x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

iii) Neutral je 1

iv) Inverzni element je $\frac{1}{x}$ jer $\frac{1}{x}\cdot x=x\cdot\frac{1}{x}=1$ (Ovo radi jer smo izbacili 0)

v) Važi komutativnost $\forall x,y\in Q\rightarrow x\cdot y=y\cdot x$

Za svako $x,y,z\in Q$ važi $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ važi i distributivni zakon.

Kod zadataka gde treba ispitati (dokazati) da je neka struktura prsten ili polje uopšteno ima mnogo posla .

Krenete redom, stavka po stavka....

www.matematiranje.in.rs