Grupoid,semigrupa,monoid,grupa,Abelova grupa-definicije i teorijske napomene

1. Grupoid

Skup S, zajedno sa jednom binarnom operacijom $*$ definisanom u S zove se *grupoid*.

Još zapisujemo $(S,*)$ je grupoid .

Osnovno svojstvo grupoida je: **ako** $x, y \in S$ **tada** $x * y \in S$ **.**

Matematički se ovo kaže da je **skup S zatvoren u odnosu na operaciju $*$.**

Primeri:

$(N,+)$ je grupoid . Kad uzmemo dva prirodna broja i saberemo ih, opet dobijamo prirodni broj!

$(N,\cdot)$ je grupoid . Kad uzmemo dva prirodna broja i pomnožimo ih, opet dobijamo prirodni broj!

$(N,-)$ **nije grupoid** . Kad uzmemo dva prirodna broja i oduzmemo ih, ne mora da se dobije opet prirodan broj.

Recimo $3 \in N$, $4 \in N$ ali $3-4=-1 \notin N$

2. Semigrupa

Ako na strukturu grupoid $(S,*)$ dodamo još i asocijativni zakon, dobijamo semigrupu.

Neki profesori semigrupu još nazivaju i polugrupa, da vas ne zbuni.

Dakle: semigrupa je asocijativni grupoid , to jest u njoj važi:

i) **ako** $x, y \in S$ **tada** $x * y \in S$ (zatvorenost operacije)

ii) $(\forall x, y, z \in S)$ $\left(x*(y*z)=(x*y)*z\right)$

$(N,+)$ je semigrupa jer važi asocijativnost sabiranja u skupu prirodnih brojeva.

$(N,\cdot)$ je semigrupa jer važi asocijativnost množenja u skupu prirodnih brojeva.

Sledećom tablicom je zadana jedna semigrupa:

$*$	***a***	***b***	***c***
a	b	c	a
b	c	c	b
c	b	b	c

i) Vidimo da je operacija zatvorena jer u tablici ima samo slova a,b i c.
ii) Moramo proveriti asocijativnost: $a*(b*c)=(a*b)*c$

$a*(b*c)=?$ $\qquad$ $\left(a*b\right)*c=?$

$a*\underbrace{(b*c)}_{\text{ovo je b}}=\underbrace{a*b}_{\text{ovo je c}}=c$ $\qquad$ $\underbrace{\left(a*b\right)}_{\text{ovo je c}}*c=\underbrace{c*c}_{\text{ovo je c}}=c$

3. Monoid

Ako na strukturu $(S,*)$ koja je semigrupa dodamo još i neutralni element dobijamo monoid.

Dakle: **monoid je semigrupa sa jediničnim elementom.**

Prilikom dokazivanja da je neka struktura monoid moramo dokazati:

i) ako $x, y \in S$ tada $x * y \in S$ **(zatvorenost operacije)**

ii) $(\forall x, y, z \in S)$ $\left(x*(y*z)=(x*y)*z\right)$ **(asocijativnost)**

iii) $(\forall x \in S)(e*x = x*e = x)$ **(postoji neutral)**

Primeri:

$(N,+)$ nije monoid jer nemamo neutral (nula) za sabiranje u skupu prirodnih brojeva

$(N_0,+)$ gde je $N_0 = N \cup \{0\}$ (skup prirodnih brojeva proširen nulom) jeste monoid jer je neutral baš nula!

$(N,\cdot)$ je monoid kod koga je neutralni element jedinica : $(\forall x \in N)(1\cdot x = x\cdot 1 = x)$

4. Grupa

Ako na strukturu monoid dodamo još da **postoji inverzni element** dobijamo **grupu**.

Dakle, prilikom dokazivanja da je neka struktura $(S,*)$ grupa moramo dokazati:

i) ako $x, y \in S$ tada $x * y \in S$ **(zatvorenost operacije)**

ii) $(\forall x, y, z \in S)$ $\left(x*(y*z)=(x*y)*z\right)$ **(asocijativnost)**

iii) $(\forall x \in S)(e*x = x*e = x)$ **(postoji neutral)**

iv) $(\forall x \in S)$ $(\exists x` \in S)$ $(x * x` = x` * x = e)$ **(postoji inverzni element)**

Primeri:

$(Z,+)$ **je grupa.**

Zatvorenost operacije važi .

Asocijativnost sabiranja važi.

Nautralni element za sabiranje je nula.

Inverzni element je suprotan broj : $(\forall x \in Z)$ $(\exists (-x) \in Z)$ $(x + (-x) = (-x) + x = 0)$

$(Q,+)$ **je grupa.** Slično razmišljanje kao za $(Z,+)$

Da li je $(Q,\cdot)$ grupa?

Nije!

Zatvorenost operacije važi.

Asocijativnost množenja važi.

Postoji neutralni element i to je jedinica . $(\forall x \in Q)(1 \cdot x = x \cdot 1 = x)$

Problem nastaje sa inverznim elementom. Znamo da je inverzni element za množenje oblika $\frac{1}{x}$,
ali u situaciji kad je $x \neq 0$. Iz tog razloga $(Q,\cdot)$ **nije grupa.**

Ako bi posmatrali strukturu $(Q \setminus \{0\},\cdot)$**,** to jest skup racionalnih brojeva bez nule , tu bi već imali i inverzni

element i ta struktura bi bila grupa!

5. Abelova grupa

Ako na strukturu grupa dodamo još i komutativnost, dobijamo Abelovu grupu.

Dakle, prilikom dokazivanja da je neka struktura $(S,*)$ Abelova grupa moramo dokazati:

i) ako $x, y \in S$ tada $x * y \in S$ **(zatvorenost operacije)**

ii) $(\forall x, y, z \in S)$ $\left(x*(y*z)=(x*y)*z\right)$ **(asocijativnost)**

iii) $(\forall x \in S)(e * x = x * e = x)$ **(postoji neutral)**

iv) $(\forall x \in S)$ $(\exists x` \in S)$ $(x * x` = x` * x = e)$ **(postoji inverzni element)**

v) $(\forall x, y \in S)$ $(x * y = y * x)$ **(komutativnost)**

Još ne bi bilo loše zapamtiti da u grupi važe sledeća svojstva:

Za cele brojeve n i m :

$i)\ \left(x^{-1}\right)^{n} = \left(x^{n}\right)^{-1}$

$ii)\ x^{n+m} = x^{n} \cdot x^{m}$

$iii)\ \left(x^{n}\right)^{m} = x^{n \cdot m}$

Važi zakon skraćivanja

$x * y = x * z \rightarrow y = z$

U grupi svaki element ima samo jedan inverzni element

U grupi svaka „linearna” jednačina $a*x=b$ ima jedinstveno rešenje

U sledećem fajlu ćemo raditi primere ….

www.matematiranje.in.rs