HORNEROVA ŠEMA

U fajlovima iz prve godine srednje škole , polinomi i algebarski izrazi, smo naučili kako se dele polinomi i kako se pomoću Bezuovog stava dobija ostatak pri deljenju polinoma.

Engleski matematičar **Horner** je napravio šemu za deljenje polinoma $\boxed{P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o}$ sa $\boxed{x-c}$.

Ideju je dobio u teoremi o jednakosti dva polinoma : *Polinomi P i Q su identični ako i samo ako su istog stepena i ako su im koeficijenti uz iste stepene od x jednaki*.

Da mi prepričamo njegovu ideju...

Kad delimo polinom $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o$, koji je n - tog stepena sa $x-c$, dobijamo polinom

$Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_o$, koji je n-1 stepena i ostatak, to jest :

$$\boxed{P_n(x)=(x-c)Q_{n-1}(x)+r}$$

Sredjujući ovo i uporedjujući odgovarajuće koeficijente Horner je dobio formulice:

$$\begin{aligned}&b_{n-1}=a_n\\&b_{k-1}=a_k+c\cdot b_k \quad \text{gde je } k=1,2,...n-1\\&r=a_0+c\cdot b_0\end{aligned}$$

Ovo zapisano u obliku šeme bi bilo:

	a_n	a_{n-1}	....	a_k	....	a_0
c	b_{n-1}	$b_{n-2}=a_{n-1}+c\cdot b_{n-1}$	....	$b_{k-1}=a_k+c\cdot b_k$	....	$r=a_0+c\cdot b_0$

Evo nekoliko primera koji će vam verovatno razjasniti primenu Hornerove šeme…

Primer 1.

Podeliti polinom $P(x)=2x^4-x^3+3x^2-4x+1$ sa $x-1$

Rešenje:

Iz polinoma $P(x)=2x^4-x^3+3x^2-4x+1$ " pročitamo" da je:

$a_4=2$ jer je to koeficijent uz najveći stepen x^4

$a_3=-1$ jer je to koeficijent uz stepen x^3

$a_2=3$ jer je to koeficijent uz stepen x^2

$a_1=-4$ to je koeficijent uz x

$a_0=1$ član bez x- sa (slobodan član)

Iz polinoma $x-1$ " pročitamo" da je: $c=1$ (uporedjujemo $x-1$ sa $x-c$)

Da postavimo Hornerovu šemu:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
c	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Sad zamenimo vrednosti …

	2	-1	3	-4	1
1	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Po Hornerovim formulicama računamo vrednosti za b- ove.

Iz formulica
$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{k-1} &= a_k + c\cdot b_k \\ r &= a_0 + c\cdot b_0 \end{aligned}$$
gde je $k=1,2,...n-1$, imamo:

$$\begin{aligned} b_3 &= a_4 \\ b_2 &= a_3 + c\cdot b_3 \\ b_1 &= a_2 + c\cdot b_2 \\ b_0 &= a_1 + c\cdot b_1 \\ r &= a_0 + c\cdot b_0 \end{aligned}$$

pa je :

$$b_3=a_4 \rightarrow \boxed{b_3=2}$$
$$b_2=a_3+c\cdot b_3 \rightarrow b_2=-1+1\cdot 2 \rightarrow \boxed{b_2=1}$$
$$b_1=a_2+c\cdot b_2 \rightarrow b_1=3+1\cdot 1 \rightarrow \boxed{b_1=4}$$
$$b_0=a_1+c\cdot b_1 \rightarrow b_0=-4+1\cdot 4 \rightarrow \boxed{b_0=0}$$
$$r=a_0+c\cdot b_0 \rightarrow r=1+1\cdot 0 \rightarrow \boxed{r=1}$$

ubacimo u šemu:

	2	-1	3	-4	1
1	2	1	4	0	1

Dobili smo polinom trećeg stepena čiji su koeficijenti $b_3=2$ uz x^3; $b_2=1$ uz x^2; $b_1=4$ uz x , a slobodan član je 0.

Imamo dakle: $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(2x^3 + 1x^2 + 4x) + 1$ ili zapisano na drugi način:

$$\boxed{\frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{x-1} = 2x^3 + 1x^2 + 4x + \frac{1}{x-1}}$$

<u>Primer 2.</u>

Podeliti polinom $P(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1$ sa $x + 2$

Rešenje:

Ovde pazimo jer nema x^4 i x^2, pa su ti koeficijenti nula!

$x + 2$ uporedjujemo sa $x - c$ pa je $c = -2$

Iz $P(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1$ je:

$a_6 = 3$
$a_5 = -2$
$a_4 = 0$
$a_3 = 1$
$a_2 = 0$
$a_1 = -4$
$a_0 = -1$

	$a_6 = 3$	$a_5 = -2$	$a_4 = 0$	$a_3 = 1$	$a_2 = 0$	$a_1 = -4$	$a_0 = -1$
$c = -2$							

Preko formulica tražimo:

$b_5 = a_6 \rightarrow \boxed{b_5 = 3}$
$b_4 = a_5 + c \cdot b_5 \rightarrow b_4 = -2 + (-2) \cdot 3 \rightarrow \boxed{b_4 = -8}$
$b_3 = a_4 + c \cdot b_4 \rightarrow b_3 = 0 + (-2) \cdot (-8) \rightarrow \boxed{b_3 = 16}$
$b_2 = a_3 + c \cdot b_3 \rightarrow b_2 = 1 + (-2) \cdot 16 \rightarrow \boxed{b_2 = -31}$
$b_1 = a_2 + c \cdot b_2 \rightarrow b_1 = 0 + (-2) \cdot (-31) \rightarrow \boxed{b_1 = 62}$
$b_0 = a_1 + c \cdot b_1 \rightarrow b_0 = -4 + (-2) \cdot 62 \rightarrow \boxed{b_0 = -128}$
$r = a_0 + c \cdot b_0 \rightarrow r = -1 + (-2) \cdot (-128) \rightarrow \boxed{r = 255}$

	$a_6=3$	$a_5=-2$	$a_4=0$	$a_3=1$	$a_2=0$	$a_1=-4$	$a_0=-1$
$c=-2$	$b_5=3$	$b_4=-8$	$b_3=16$	$b_2=-31$	$b_1=62$	$b_0=-128$	$r=255$

Imamo da je:

$$3x^6-2x^5+x^3-4x-1=(x+2)(3x^5-8x^4+16x^3-31x^2+62x-128)+255$$

Ili u drugom zapisu : $$\boxed{\frac{3x^6-2x^5+x^3-4x-1}{x+2}=3x^5-8x^4+16x^3-31x^2+62x-128+\frac{255}{x+2}}$$