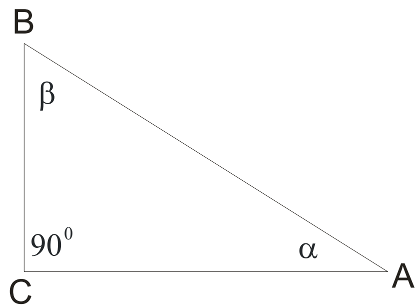
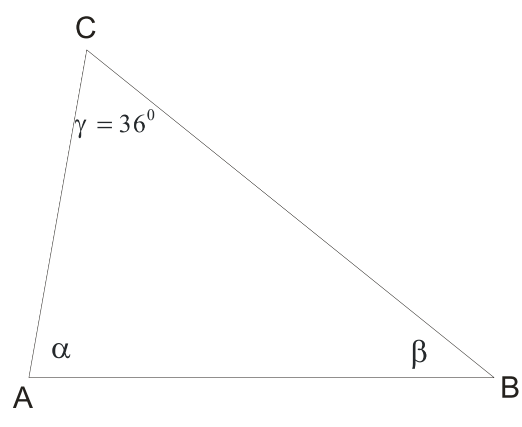
200. Разлика два оштра угла у правоуглом троглу је 22°. Одредити све углове тог троугла.



Znamo da je zbir unutrašnjih uglova u svakom trouglu 180^0, a kako je naš trougao pravougli ,jedan njegov ugao je 90^0, tako da ostaje da zbir ostala dva takođe mora biti 90^0. Postavimo sistem:

$$\alpha+\beta=90^0$$
$$\alpha-\beta=22^0$$
$$2\alpha=112^0 \rightarrow \alpha=\frac{112^0}{2} \rightarrow \alpha=56^0$$
$$\alpha+\beta=90^0 \rightarrow 56^0+\beta=90^0 \rightarrow \beta=90^0-56^0 \rightarrow \beta=34^0$$

201. Један угао у троглу је γ = 36°. Одредити преостала два угла тог троугла ако се зна да је њихов збир три пута већи од њихове разлике.



Znamo da je zbir unutrašnjih uglova u svakom trouglu 180^0:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0$$
$$\alpha+\beta+36^0=180^0$$
$$\alpha+\beta=180^0-36^0$$
$$\alpha+\beta=144^0$$

Dobili smo jednu jednačinu, a drugu ćemo dobiti prateći tekst zadatka: njihov zbir je tri puta veći od njihove razlike:

$\alpha+\beta=3\cdot(\alpha-\beta)$
$144^0=3\cdot(\alpha-\beta)$
$\alpha-\beta=\frac{144^0}{3}$
$\alpha-\beta=48^0$

Sada možemo postaviti sistem:

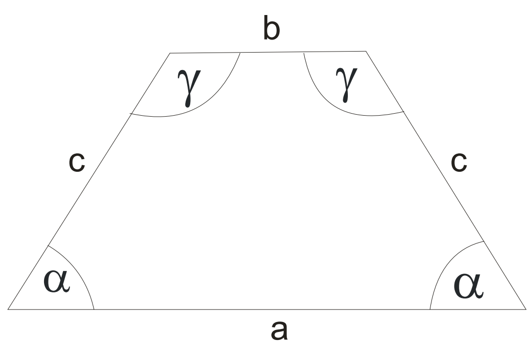
$\alpha+\beta=144^0$
$\alpha-\beta=48^0$
$2\alpha=192^0\rightarrow\alpha=\frac{192^0}{2}\rightarrow\alpha=96^0$
$\alpha+\beta=144^0$
$96^0+\beta=144^0\rightarrow\beta=144^0-96^0\rightarrow\beta=48^0$

202. Збир три угла у четвороуглу је 268°. Одредити његов четврти угао δ.

Zbir unutrašnjih uglova u svakom četvorouglu je 360^0, a kako znamo zbir tri ugla da je 268^0, četvrti ugao ćemo naći kad :

$\delta=360^0-268^0$
$\delta=92^0$

203. Одредити углове једнакокраког трапеза ако се зна да је разлика $\gamma-\alpha$ његова два наспрамна угла једнака 30°.



Znamo da je zbir unutrašnjih uglova kod svakog trapeza 360^0. Kako je naš trapez jednakokraki , to nam govori da su uglovi na osnovicama jednaki(vidi sliku).

Još znamo da je zbir naspramnih uglova 180^0. Formiramo sistem:

$\gamma - \alpha = 30^0$

$\gamma + \alpha = 180^0$

$2\gamma = 210^0 \rightarrow \gamma = \dfrac{210^0}{2} \rightarrow \gamma = 105^0$

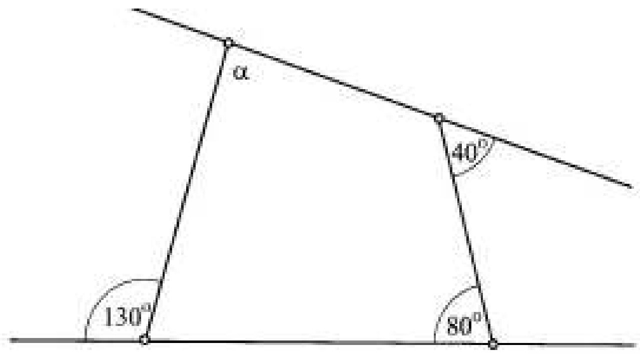
$\gamma + \alpha = 180^0$

$105^0 + \alpha = 180^0$

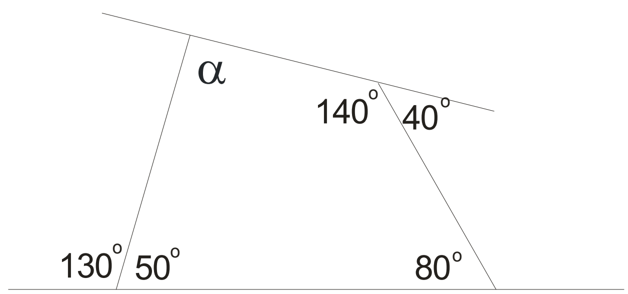
$\alpha = 180^0 - 105^0$

$\alpha = 75^0$

204. Ако су подаци као на приложеном цртежу, израчунати угао α.



Ovde ćemo koristiti činjenicu da je zbir unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla 180^0.



Za spoljašnji ugao od 130^0 odgovarajući unutrašnji je $180^0 - 130^0 = 50^0$ (vidi sliku)

Za spoljašnji ugao od 40^0 odgovarajući unutrašnji je $180^0 - 40^0 = 140^0$(vidi sliku)

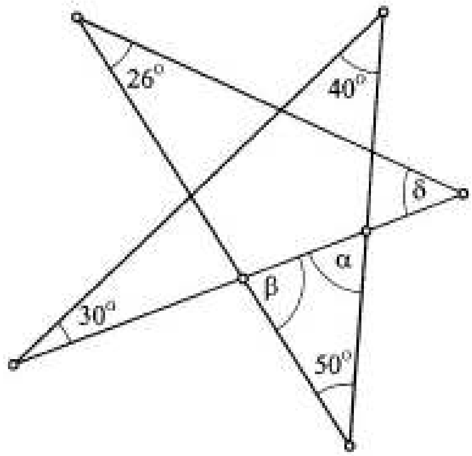
Sad znamo tri unutrašnja ugla, i znamo da je zbir sva četiri 360^0. Dakle:

$\alpha = 360^0 - (50^0 + 80^0 + 140^0)$

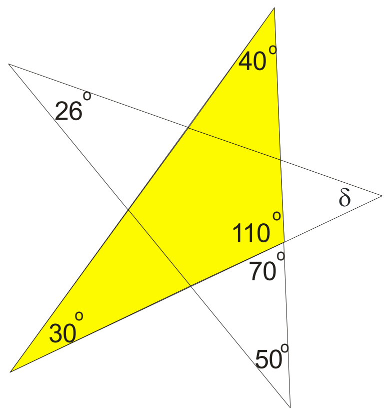
$\alpha = 360^0 - 270^0$

$\alpha = 90^0$

205. Ако су подаци као на приложеном цртежу, одредити назначене углове (тим редом) α, β и δ.

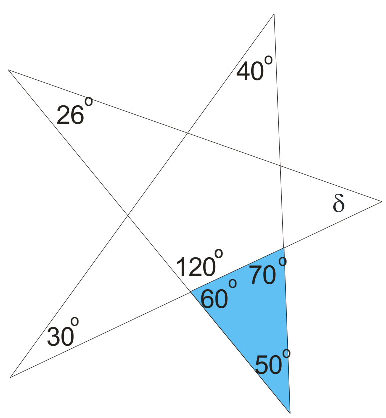


Uočimo na slici označeni (žuti) trougao.



Kako je zbir unutrašnjih uglova u svakom trouglu 180^0, nalazimo da je treći njegov ugao 110^0, a njegov odgovarajući spoljašnji je onda $\alpha = 70^0$.

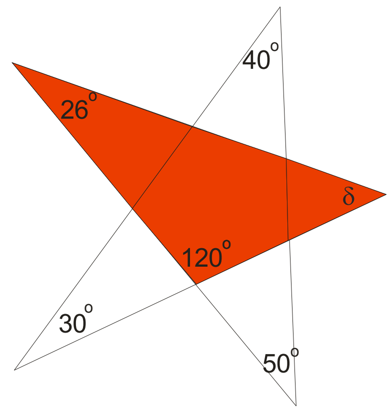
Uočimo dalje na slici označeni (plavi) trougao.



Njegov treći ugao je očigledno $\beta = 180^0 - (70^0 + 50^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

Onda je njegov spoljašnji 120^0.

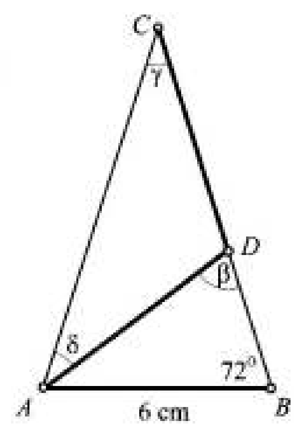
I konačno , uočimo crveni trougao:



$\delta = 180^0 - (120^0 + 26^0) = 180^0 - 146^0 = 34^0$

206. Основица једнакокраког троугла ABC је $AB = 6$ cm, а углови на основици по 72°. Ако је AD симетрала угла BAC, одредити:

1) назначене углове γ, δ и β.
2) дужину изломљене линије $BADC$.



Kako su uglovi na osnovici po 72^0, treći , nepoznati ugao gama ćemo izračunati:

$$\gamma = 180^0 - (72^0 + 72^0) = 180^0 - 144^0 = 36^0$$

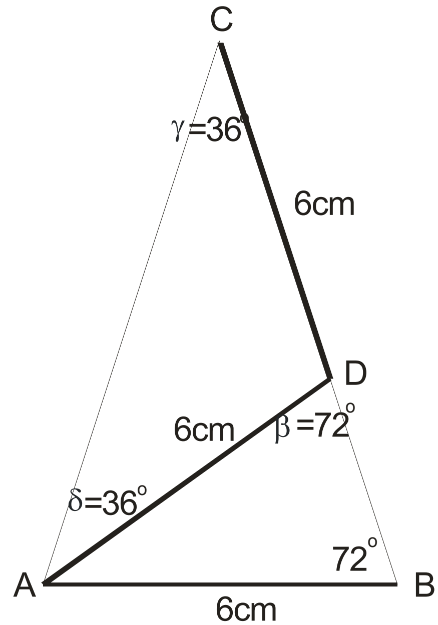
Kako u zadatku kaže da je AD simetrala ugla na osnovici od 72^0, a znamo da simetrala deli ugao na dva jednaka dela to je:

$$\delta = \frac{72^0}{2} = 36^0$$

Onda zaključujemo da je i ugao $\measuredangle BAD = 36^0$.

Naravno , onda je ugao beta:

$\beta = 180^0 - (36^0 + 72^0) = 180^0 - 108^0 = 72^0$



Trougao ABD je jednakokraki, dakle BA = DA = 6cm.

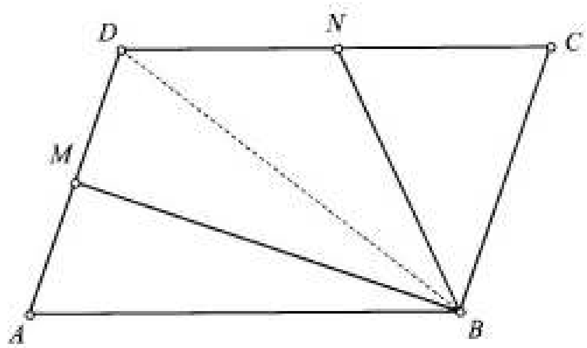
Trougao ADC je takodje jednakokraki , pa je AD = DC = 6 cm

Dužina BADC će biti : 6 + 6 + 6 = 18cm

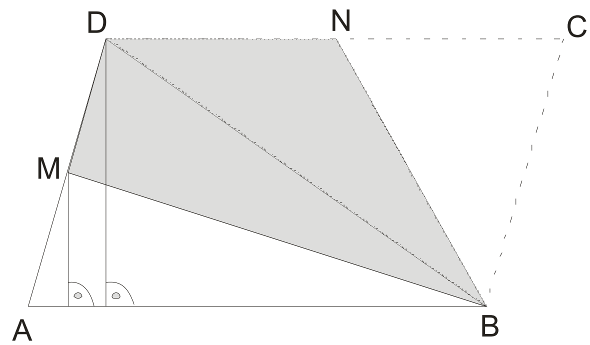
Napomena:

Trougao sa uglovima od $72^0, 72^0$ i 36^0 zove se **ZLATNI TROUGAO.**

207. Тачке *M* и *N* су средишта страница *AD* и *CD* паралелограма *ABCD*. Ако је површина тог паралелограма 24 cm^2, одредити површину четвороугла *BNDM*.



Posmatrajmo trouglove ABD i MBD.



Visina trougla AMB je polovina visine trougla ABD. Površina trougla ABD je $P_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot h}{2}$, a površina trougla AMD je $P_{\triangle AMD} = \frac{AB \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{1}{2} P_{\triangle AMB}$.

Na sličan način zaključujemo da je $P_{\triangle BND} = \frac{CD \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{1}{2} P_{\triangle BCD}$

Šta nam ovo govori?

Pa da je osenčeni deo ustvari baš polovina od površine četvorougla ABCD, pa je :

$$P_{\square BNDM} = \frac{1}{2} P_{\square ABCD} = \frac{1}{2} 24 = 12 cm^2$$

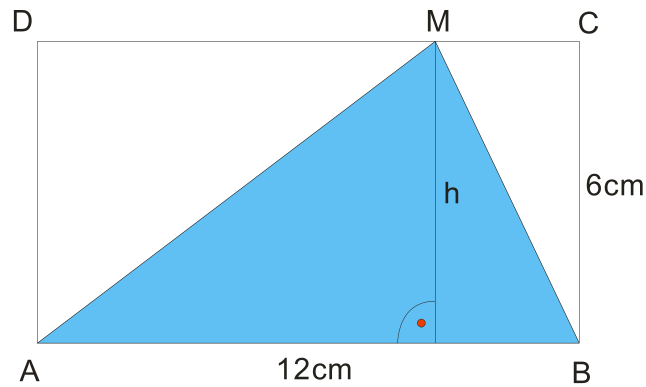
208. Обим једнакостраничног троугла ABC је 18 cm. Одредити његову површину P и полупречник уписаног круга r.

$$O = 18cm$$
$$P = ?$$
$$r_u = ?$$

$$O = 3a$$
$$18 = 3a$$
$$a = \frac{18}{3}$$
$$a = 6cm$$
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} cm^2$$
$$r_u = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} cm$$

209. Нека је M било која тачка на страници CD правоугаоника $ABCD$. Ако је $AB = 12$ cm и $BC = 6$ cm, одредити површину троугла ABM.

Najpre da nacrtamo odgovarajuću sliku:



Uočimo da je visina trougla jednaka stranici BC pravougaonika , dakle h = 6cm.

Sada nije teško naći površinu trougla:

$$P = \frac{a_{\triangle} \cdot h}{2}$$

$$P = \frac{AB \cdot h}{2}$$

$$P = \frac{12 \cdot 6}{2}$$

$$P = 36cm^2$$

210. Две странице троугла су $a = 12$ cm и $b = 9$ cm, а висина која одговара првој од тих страница $h = 6$ cm. Одредити висину која одговара страници b.

$$a = 12cm$$

$$b = 9cm$$

$$h_a = 6cm$$

$$h_b = ?$$

Nepoznatu visinu ćemo naći kombinujući formule za površinu trougla:

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ i $P = \frac{b \cdot h_b}{2}$

$\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ pomnožimo sve sa 2

$a \cdot h_a = b \cdot h_b$ odavde izrazimo h_b

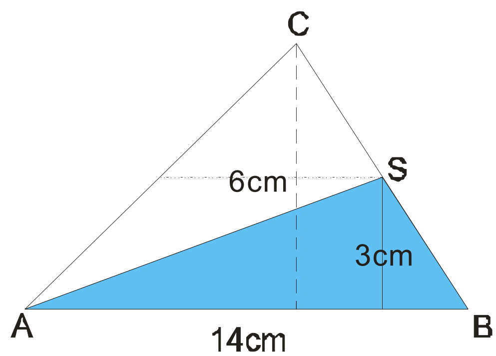
$h_b = \frac{a \cdot h_a}{b}$

$h_b = \frac{12 \cdot 6}{9}$

$h_b = 8cm$

211. Дужина једне странице троугла ABC је $AB = 14$ cm, а њој одговарајуће висине $h = 6$ cm. Ако је тачка S средиште дужи BC, одредити површину троугла ABS.

Nacrtajmo najpre sliku:



Uočavamo da je visina trougla ABS jednaka polovini visine celog trougla , dakle 3cm.

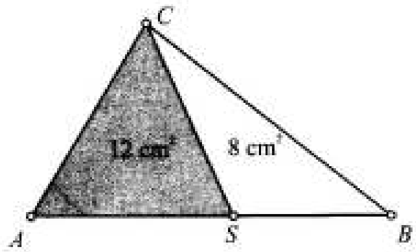
$P = \frac{a_{\triangle} \cdot h}{2}$

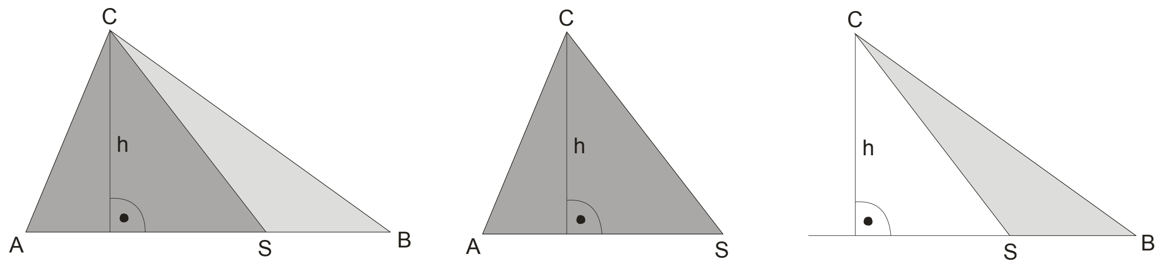
$P = \frac{AB \cdot h}{2}$

$P = \frac{14 \cdot 3}{2}$

$P = 21cm^2$

212. Тачка S је на страници троугла ABC. Ако су површине троуглова ASC и BSC редом $12\ \text{cm}^2$ и $8\ \text{cm}^2$, одредити размеру $AS : SB$.





Najpre uočimo da je visina h celog trougla ABC , istovremeno   i   visina trouglova ASC i SBC.

Krenućemo od datog odnosa površina trouglova   i naći traženi odnos:

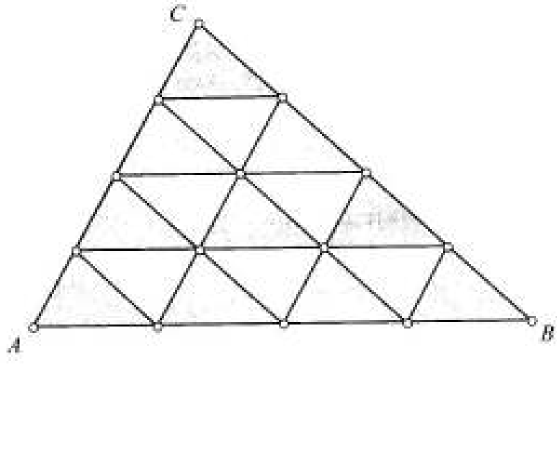
$$P_{\triangle ASC} : P_{\triangle BSC} = 12 : 8$$

$$\frac{AS \cdot h}{2} : \frac{SB \cdot h}{2} = 12 : 8 \quad \text{(kratimo h i 2)}$$

$$AS : SB = 12 : 8 \quad \text{(skratimo sa 4)}$$

$$AS : SB = 3 : 2$$

213. Површина троугла ABC са приложеног цртежа је $48\ \text{cm}^2$ и сви мањи троуглови су подударни. Одредити површину осенченог дела фигуре на том цртежу.



Kako su svi trouglovi podudarni(imaju jednake površine) , naći ćemo površinu jednog. Kako?

Pa jednostavno prebrojimo koliko ih ima , 16 , i podelimo površinu celog trougla sa brojem malih trouglova.

$48:16=3cm^2$ to je površina jednog malog trougla.

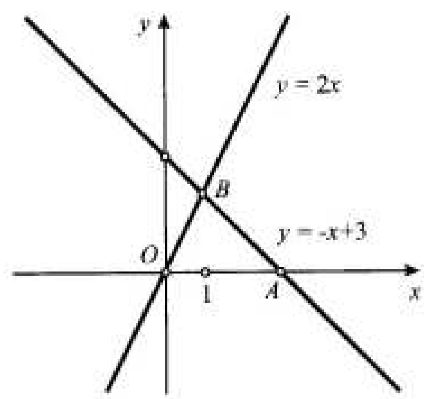
Dalje prebrojimo osenčene trougliće, ima ih 10, i to pomnožimo sa 3.

$P_{os.dela}=10\cdot 3=30cm^2$

214. У координатном систему xOy, права $y=-x+3$ сече осу Ox у тачки A и праву $y=2x$ у тачки B. Одредити:

А) координате тачака A и B;

Б) површину троугла OAB.



Tačka A je mesto gde prava y = -x +3 seče x osu. Znači, u datoj jednačini stavimo y = 0 i izračunamo x.

$$y=-x+3$$
$$0=-x+3$$
$$0+x=3$$
$$x=3$$

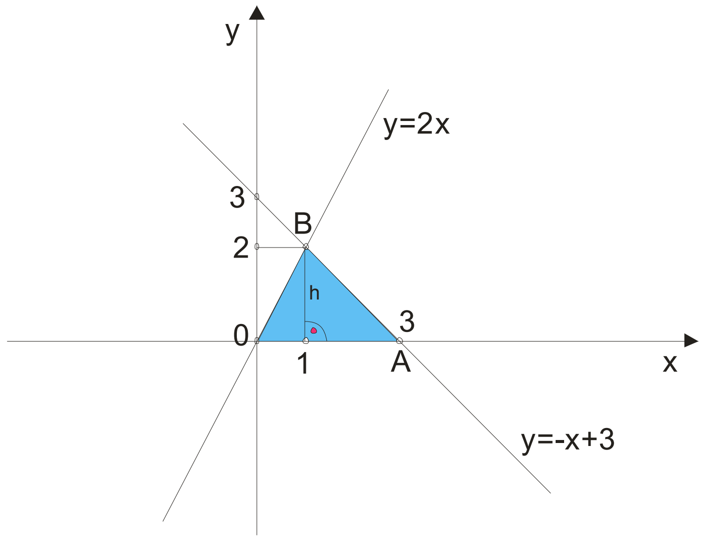
Dakle, tačka A ima koordinate A(3,0).

Tačka B je mesto preseka pravih y = -x +3 i y = 2x . Presek ćemo naći rešavajući sistem jednačina od te dve prave:

$$y=-x+3$$
$$y=2x$$
$$-x+3=2x$$
$$-x-2x=-3$$
$$-3x=-3$$
$$x=1$$

Kako je y = 2x → y=2

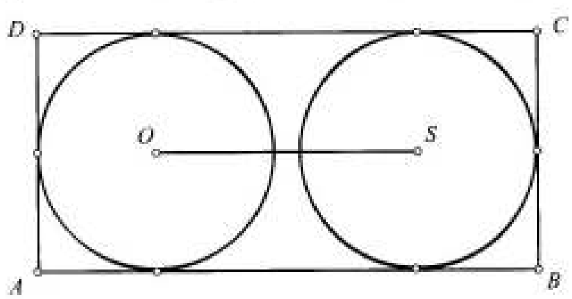
Tačka B ima koordinate B(1,2)

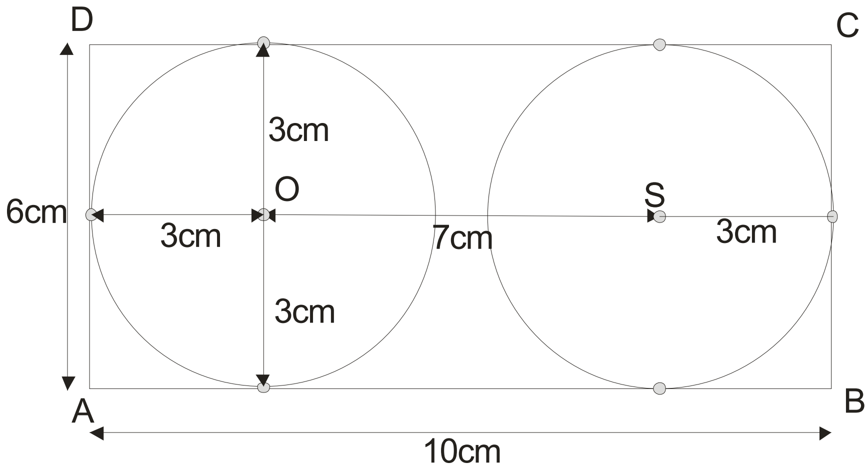


Trougao OAB ima osnovicu dužine 3 i visinu 2, pa je:

$$P=\frac{a_{\triangle}\cdot h}{2}$$
$$P=\frac{3\cdot 2}{2}$$
$$P=3$$

215. Два круга полупречника $r = 3$ cm додирују по три странице правоугаоника и растојање између њихових центара је 7 cm. Одредити површину тог правоугаоника.





Duža stranica pravougaonika je 3 + 7 + 3 = 13cm

Kraća stranica pravougaonika je 3 + 3 = 6cm

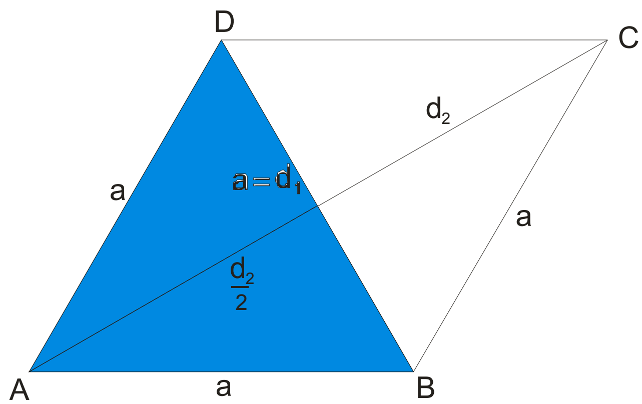
$P = a \cdot b$
$P = 13 \cdot 6$
$P = 78cm^2$

216. Одредити површину ромба чије су дијагонале $d_1 = 7$ cm и $d_2 = 12$ cm.

$d_1 = 7cm$
$d_2 = 12cm$
$P = ?$
Samo upotrebimo formulu:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$
$$P = \frac{7 \cdot 12}{2}$$
$$P = 42cm^2$$

217. Једна дијагонала ромба је подударна његовој страници, а његова друга дијагонала је 6 cm. Одредити страницу и површину тог ромба.



Trougao ABD je prema podacima jednakostraničan, a njegova visina je polovina duže dijagonale, znači 3 cm.

Upotrebićemo formulu za visinu jednakostraničnog trougla i tako naći stranicu a .

$$h_{\triangle} = \frac{a_{\triangle}\sqrt{3}}{2}$$

$$3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a\sqrt{3} = 6$$

$$a = \frac{6}{\sqrt{3}} \quad \text{racionališemo}$$

$$a = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$$a = 2\sqrt{3}cm$$

$$d_1 = a = 2\sqrt{3}cm$$

Samo upotrebimo formulu:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$P = \frac{2\sqrt{3} \cdot 6}{2}$$

$$P = 6\sqrt{3}cm^2$$

218. Одредити површину трапеза чије су основице $a = 9$ cm, $b = 5$ cm и чија је висина једнака његовој средњој линији.

$a = 9cm$

$b = 5cm$

$h = m$

$P = ?$

Najpre ćemo naći srednju liniju:

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{9+5}{2} = \frac{14}{2} = 7cm$

Kako su srednja linija i visina jednaki , mora biti: h=7cm

$P = m \cdot h$

$P = 7 \cdot 7$

$P = 49cm^2$

219. Средња линија једнакокраког трапеза је 9 cm а једна од његових основица 12 cm. Ако је површина тог трапеза $P = 36$ cm^2, одредити:

А) висину и другу основицу тог трапеза;

Б) крак тог трапеза.

$m = 9cm$

$a = 12cm$

$P = 36cm^2$

$A) \quad h = ? \quad b = ?$

$B) \quad c = ?$

Iskoristićemo površinu i naći visinu trapeza:

P=m$\cdot$h

36=9$\cdot$h

h=$\frac{36}{9}$

$h = 4cm$

Iz srednje linije ćemo naći drugu osnovicu:

$m = \frac{a+b}{2}$

$9 = \frac{12+b}{2}$

$12 + b = 9 \cdot 2$

$12 + b = 18$

$b = 6cm$

Primenom Pitagorine teoreme dolazimo da kraka c:

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$c^2 = 4^2 + \left(\frac{12-6}{2}\right)^2$$

$$c^2 = 16 + 3^2$$

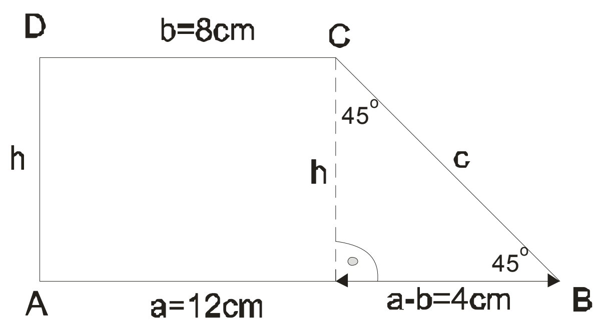
$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25$$

$$c = \sqrt{25}$$

$$c = 5cm$$

220. Основице правоуглог трапеза су $a = 12$ cm и $b = 8$ cm, а његов оштар угао 45°. Одредити обим тог трапеза.



Sa slike jasno uočavamo jednakokrako pravougli trougao sa katetama h i a – b.

Onda je h = a-b = 4cm

Stranicu c možemo naći primenom Pitagorine teoreme, a možemo razmišljati da je to dijagonala kvadrata stranice

4cm, i odmah dobijamo da je $c = 4\sqrt{2}cm$

$$O = a + b + c + h$$

$$O = 12 + 8 + 4\sqrt{2} + 4$$

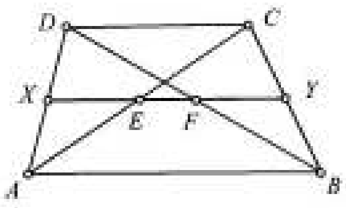
$O = 24 + 4\sqrt{2}$ (ili ako izvučemo 4 ispred zagrade)

$O = 4(6 + \sqrt{2})$cm

221. Основице AB и CD трапеза $ABCD$ су 8 cm и 6 cm. Ако његова средња линија XY сече дијагонале AC и BD у тачкама E и F, одредити:

А) дужине дужи XE и YF,

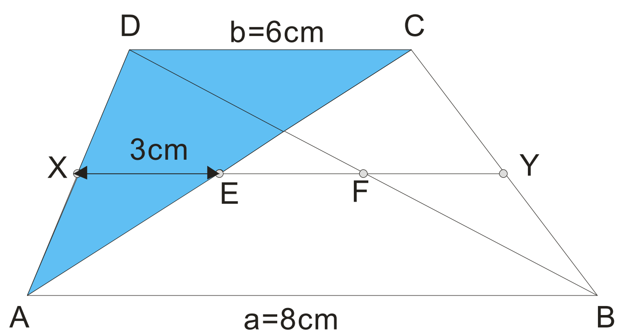
Б) дужину дужи EF.



Nadjimo najpre dužinu srednje linije trapeze:

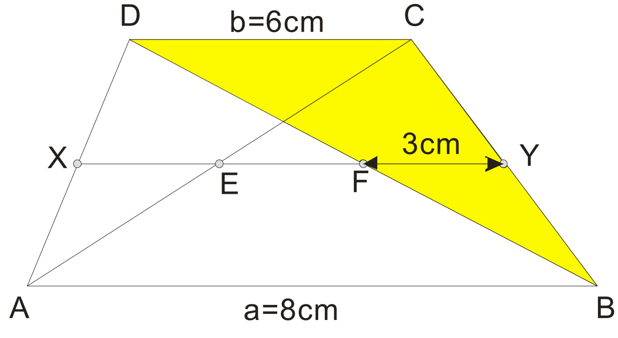
$$m = \frac{a+b}{2}$$
$$m = \frac{8+6}{2}$$
$$m = \frac{14}{2}$$
$$m = 7cm$$

Dakle   XY= 7cm



Uočimo na slici trougao ACD (plavi). Kod njega je XE srednja linija trougla, pa je jednaka polovini paralelne stranice:

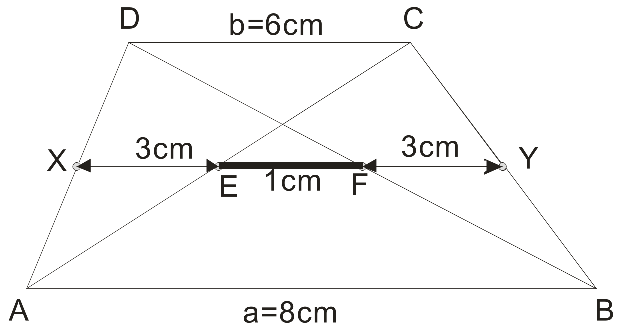
$$XE = \frac{CD}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$$



Posmatrajmo sada trougao BCD.

FY je srednja linija ovog trougla :

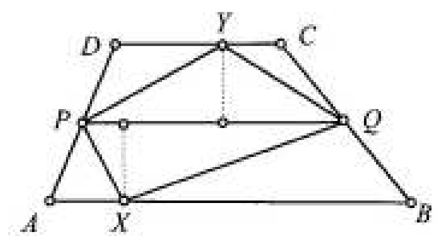
$$FY = \frac{CD}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$$



Našli smo da je XZ = 7cm, XE = 3cm i FY = 3cm. Odavde:

EF = 7 - 3- 3 = 1cm

222. Основице трапеза $ABCD$ су $a = 16$ cm и $b = 8$ cm, а његова висина је половина средње линије PQ. Одредити површину четвороугла $PXQY$ чија су темена X и Y на страницама AB и CD.

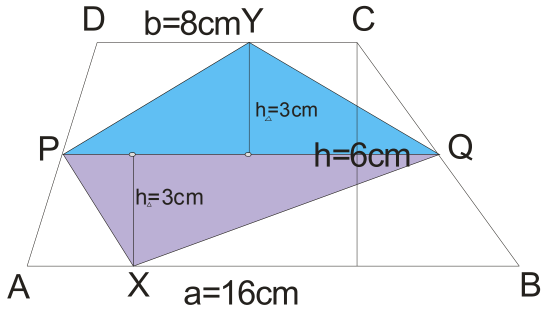


Nađimo najpre srednju liniju trapeza, pa će njena polovina biti visina:

$$m = \frac{a+b}{2}$$
$$m = \frac{16+8}{2}$$
$$m = \frac{24}{2}$$
$$m = 12cm$$

$$h = \frac{m}{2} = \frac{12}{2}$$
$$h = 6cm$$

Dalje nam je neophodna slika:



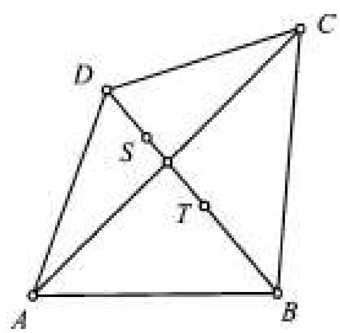
Visine trouglova PQX i PQY su jednake polovini visine trapeze, dakle po 3cm.

Površinu traženog četvorougla ćemo naći kao zbir površina ova dva trougla, čija je osnovica PQ ustvari srednja

linija trapeza dužine 12 cm a visine po 3cm:

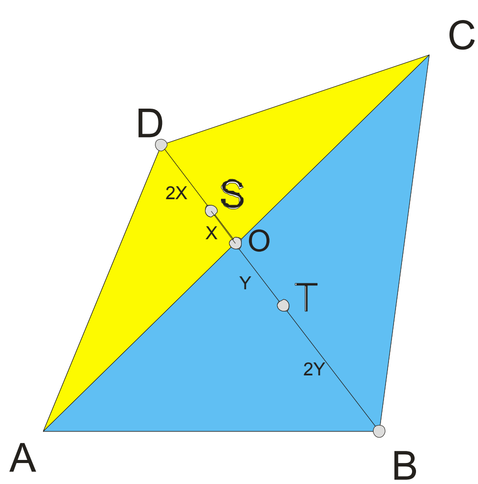
$$P_{\square} = P_{\triangle PQX} + P_{\triangle PQY}$$
$$P_{\square} = \frac{12 \cdot 3}{2} + \frac{12 \cdot 3}{2}$$
$$P_{\square} = 18 + 18$$
$$P_{\square} = 36cm^2$$

223. Дијагонала BD четвороугла $ABCD$ полови његову дијагоналу AC. Ако је $BD = 21$ cm, одредити растојање између тежишта T и S троуглова ABC и ACD.



Iskoristićemo činjenicu da težište deli težišnu duž u odnosu 2: 1.

Evo slike:



Ako dužinu SO obeležimo sa x, onda će DS biti 2x. ($SO = x \to DS = 2x$)

Ako dužinu TO obeležimo sa y, onda će BT biti 2y. ($TO = y \to BT = 2y$)

Cela duž BD je

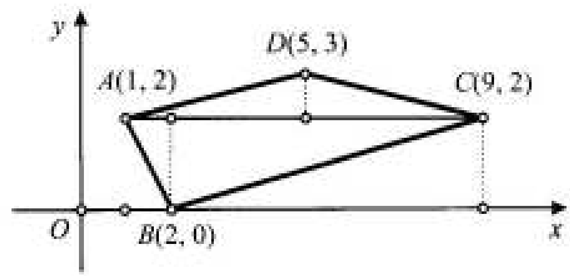
$$BD = BT + TO + OS + SD$$
$$24 = 2y + y + x + 2x$$
$$24 = 3x + 3y \quad \text{sve podelimo sa 3}$$
$$x + y = 8$$

Dakle, traženo rastojanje je TS = 8cm.

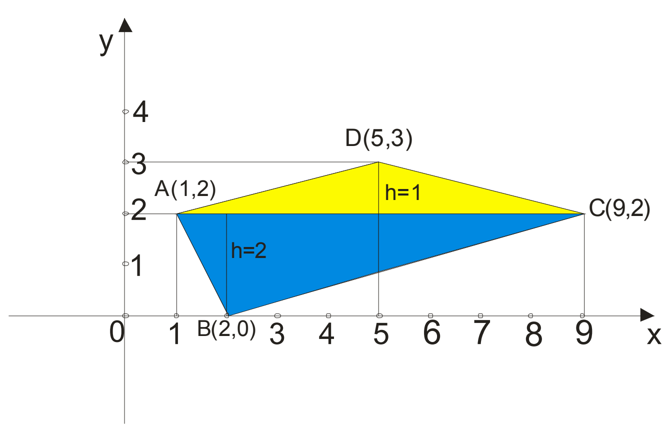
224. У координатном систему xOy су дате тачке A, B, C и D као на приложеном цртежу.

А) Одредити површину троугла ACD.

Б) Одредити површину четвороугла $ABCD$.



Proučimo najpre crtež:



Vidimo da se četvorougao ABCD sastoji od dva trougla čija je osnovica ista AC = 9-1 = 8,

i visina koje su 3-2=1(žuti trougao) i 2-0=2(plavi trougao).

$$P_{\triangle ACD} = \frac{8 \cdot 1}{2} = 4$$

Nadjimo i površinu trougla ABC

$$P_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8$$

Površina četvorougla ABCD jednaka je zbiru površina ova dva trougla:

$$P_{\square ABCD} = P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD}$$
$$P_{\square ABCD} = 4 + 8$$
$$P_{\square ABCD} = 12$$