

333. Полупречник основе праве купе је 6 cm, а висина купе је 11 cm. Израчунати запремину те купе.

$$r = 6\text{ cm}$$

$$H = 11\text{ cm.}$$

$$V = ?$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} 6^2 \pi \cdot 11$$

$$V = \frac{1}{3} 36\pi \cdot 11 \quad \text{skratimo 36 i 3 sa 3}$$

$$V = 12\pi \cdot 11$$

$$V = 132\pi\text{ cm}^3$$

334. Израчунати површину праве купе чија је запремина $3\pi \text{ cm}^3$, а површина њене основе $3\pi \text{ cm}^2$.

$$V = 3\pi \text{ cm}^3$$

$$B = 3\pi \text{ cm}^2$$

$$P = ?$$

Najpre tražimo visinu H primenjujući početnu formulu za zapreminu:

$$V = \frac{1}{3}BH$$

$$3\pi = \frac{1}{3}3\pi \cdot H \quad \text{ovde skratimo trojke i } \pi$$

$$3 = H$$

$$H = 3 \text{ cm}$$

Iz površine baze ćemo lako naći poluprečnik

$$B = r^2\pi$$

$$3\pi = r^2\pi$$

$$r^2 = 3$$

$$r = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Primenom Pitagorine teoreme ćemo naći izvodnicu s :

$$s^2 = H^2 + r^2$$

$$s^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2$$

$$s^2 = 9 + 3$$

$$s^2 = 12$$

$$s = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

I konačno, površina je:

$$P = r\pi(r + s)$$

$$P = \sqrt{3}\pi(\sqrt{3} + 2\sqrt{3})$$

$$P = \sqrt{3}\pi \cdot 3\sqrt{3}$$

$$P = 3\pi\sqrt{3}^2$$

$$P = 3\pi \cdot 3$$

$$P = 9\pi \text{ cm}^2$$

335. Запремина праве купе је $800\pi \text{ cm}^3$. Израчунати површину купе ако су пречник основе и висина у размери 5 : 6.

$$V = 800\pi \text{ cm}^3$$

$$2r : H = 5 : 6 \quad (\text{ пречник основе и висина су у размери 5:6})$$

$$P = ?$$

$$12r = 5H \quad \text{odavde izrazimo } H$$

$$H = \frac{12r}{5}$$

Sada ovo menjamo u formulu za zapreminu:

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$$

$$800\pi = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot \frac{12r}{5} \quad \text{pokratimo...}$$

$$800 = \frac{4r^3}{5}$$

$$4r^3 = 4000 \rightarrow r^3 = 1000 \rightarrow r^3 = 10^3 \rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

Dalje nam treba izvodnica s , koju ćemo naći preko Pitagorine teoreme:

$$s^2 = r^2 + H^2$$

$$s^2 = 10^2 + 24^2$$

$$s^2 = 100 + 576$$

$$s^2 = 676$$

$$s = \sqrt{676}$$

$$s = 26 \text{ cm}$$

Konačno, površina je:

$$P = r\pi(r + s)$$

$$P = 10\pi(10 + 26)$$

$$P = 10\pi \cdot 36$$

$$P = 360\pi \text{ cm}^2$$

336. Обим основе купе је 6π cm , а висина купе је 4 cm . Израчунати:

- A) изводницу;
- B) површину;
- B) запремину купе.

$$O = 6\pi cm$$

$$H = 4 cm$$

$$A) s = ?$$

$$B) P = ?$$

$$V) V = ?$$

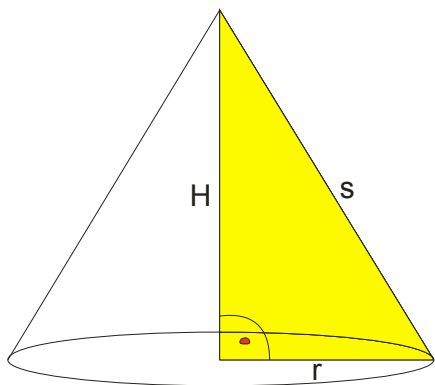
Iz obima osnove ćemo naći poluprečnik osnove r

$$O = 2r\pi$$

$$6\pi = 2r\pi$$

$$2r = 6$$

$$r = 3 cm$$



Primenom Pitagorine teoreme dobijamo izvodnicu:

$$s^2 = r^2 + H^2$$

$$s^2 = 3^2 + 4^2$$

$$s^2 = 9 + 16$$

$$s^2 = 25$$

$$s = \sqrt{25}$$

$$s = 5 cm$$

Dalje nije teško naći površinu i zapreminu:

$$P = r\pi(r + s)$$

$$P = 3\pi(3 + 5)$$

$$P = 3\pi \cdot 8$$

$$P = 24\pi cm^2$$

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$$

$$V = \frac{1}{3}3^2\pi \cdot 4$$

$$V = \frac{1}{3}9\pi \cdot 4$$

$$V = 12\pi cm^3$$

337. Површина праве купе је $90\pi \text{ cm}^2$, а површина основе је $25\pi \text{ cm}^2$. Израчунати запремину купе.

$$P = 90\pi \text{ cm}^2$$

$$B = 25\pi \text{ cm}^2$$

$$V = ?$$

Krećemo od opšte formule za površinu:

$$P = B + M$$

$$90\pi = 25\pi + M$$

$$M = 90\pi - 25\pi$$

$$M = 65\pi \text{ cm}^2$$

Iz baze ćemo lako naći poluprečnik r

$$B = r^2\pi$$

$$25\pi = r^2\pi$$

$$r^2 = 25$$

$$r = \sqrt{25}$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

Vratimo se u omotač da nađemo izvodnicu s

$$M = sr\pi$$

$$65\pi = s \cdot 5\pi \quad \text{naravno, kao i uvek, skratimo } \pi$$

$$65 = s \cdot 5$$

$$s = \frac{65}{5}$$

$$s = 13 \text{ cm}$$

Sad upotrebimo Pitagorinu teoremu

$$s^2 = r^2 + H^2$$

$$13^2 = 5^2 + H^2$$

$$169 = 25 + H^2$$

$$H^2 = 169 - 25$$

$$H^2 = 144$$

$$H = \sqrt{144}$$

$$H = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2\pi \cdot 12$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 12 \quad \text{skratimo 12 i 3 sa 3}$$

$$V = 100\pi \text{ cm}^3$$

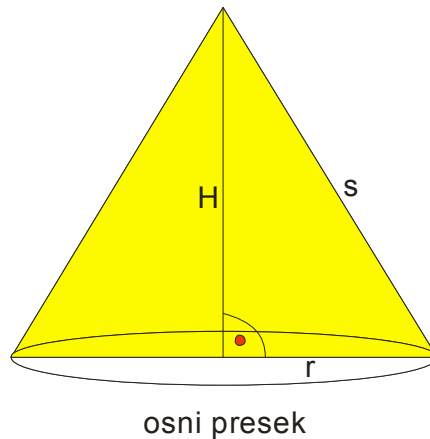
338. Ako je dužina prečnika prave kupa 18 cm, a površina kupa je $216\pi \text{ cm}^2$, izračunati površinu osnog preseka kupa.

$$2r = 18 \text{ cm}$$

$$P = 216\pi \text{ cm}^2$$

$$P_{op} = ?$$

Kako se beše izračunava površina osnog preseka? Pogledajmo sliku:



$$P_{op} = \frac{2rH}{2} \text{ to jest : } P_{op} = r \cdot H$$

Iz $2r = 18$ jasno je da je $r = 9 \text{ cm}$

Nadjimo visinu:

$$P = r\pi(r + s)$$

$$216\pi = 9\pi(9 + s) \quad \text{skratimo } \pi$$

$$216 = 9(9 + s)$$

$$9 + s = \frac{216}{9}$$

$$9 + s = 24$$

$$s = 24 - 9$$

$$s = 15 \text{ cm}$$

$$s^2 = H^2 + r^2$$

$$15^2 = H^2 + 9^2$$

$$225 = H^2 + 81$$

$$H^2 = 225 - 81$$

$$H^2 = 144$$

$$H = \sqrt{144}$$

$$H = 12 \text{ cm}$$

Sad je lako:

$$P_{op} = r \cdot H$$

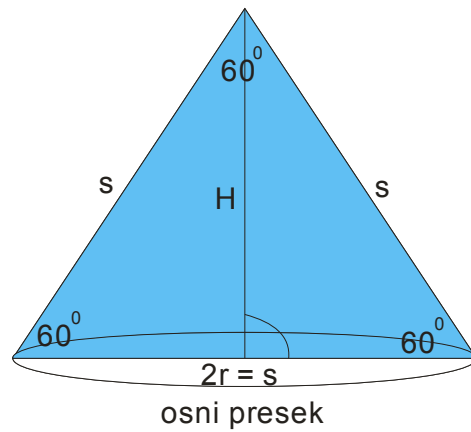
$$P_{op} = 9 \cdot 12$$

$$P_{op} = 108 \text{ cm}^2$$

339. Израчунати површину праве купе ако се зна да је њен осни пресек једнакоstrанични троугао површине $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

$$P_{op} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$P = ?$$



Oсни presek je jednakostranični trougao — to nam govori da je $2r = s$

Za površinu osnog preseka ćemo upotrebiti formulu za površinu jednakostraničnog trougla:

$$P_{\Delta} = \frac{a_{\Delta}^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$16\sqrt{3} = \frac{s^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{skratimo } \sqrt{3}$$

$$16 = \frac{s^2}{4}$$

$$s^2 = 16 \cdot 4$$

$$s^2 = 64$$

$$s = \sqrt{64}$$

$$s = 8 \text{ cm}$$

Kako je $2r = s$, onda je $2r = 8$, pa je jasno: $r = 4 \text{ cm}$

$$P = r\pi(r + s)$$

$$P = 4\pi(4 + 8)$$

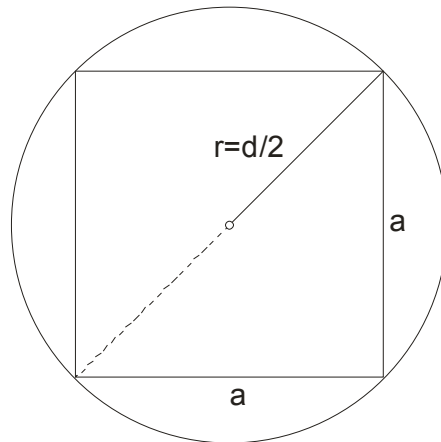
$$P = 4\pi \cdot 12$$

$$P = 48\pi \text{ cm}^2$$

340. Основа пирамиде је квадрат странице $6\sqrt{2}$ cm, а основа купе је круг описан око тог квадрата. Ако су им висине 8 cm, одредити однос њихових запремина.

Uočimo par činjenica:

- висине су им исте
- дужина основне ивце пирамиде је : $a = 6\sqrt{2}$
- да нађемо полупреčник основе купе...ту ће нам помоћи “поглед одоздо”:



Uočavamo da je poluprečnik основе купе ustvari polovina dijagonale kvadrata!

$$\text{Dakle: } r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ cm}$$

Izračunajmo sada odnos zapremina:

$$\begin{aligned} V_{\text{kupa}} : V_{\text{piramida}} &= \frac{r^2 \pi H}{3} : \frac{a^2 H}{3} \quad (\text{ovde kratimo } H, \text{ jer su im iste, i trojke}) \\ &= r^2 \pi : a^2 \\ &= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \pi : a^2 \\ &= \frac{a^2 \cdot 2}{4} \pi : a^2 \quad (\text{pokratimo } a \text{ i } 2 \text{ i } 4) \\ &= \frac{\pi}{2} : 1 \quad (\text{proširimo sa } 2) \\ &= \pi : 2 \end{aligned}$$

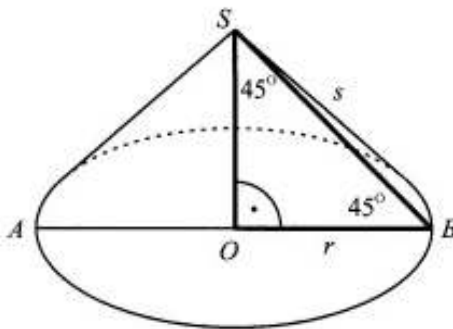
Šta primećujemo?

Pa podatak da je poluprečnik основе купе $r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ cm}$ nam nije ni trebao i podatak da je

$$a = 6\sqrt{2} \text{ je takođe nepotreban!} \quad \text{Dovoljno je znati da je : } r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

341. Обим основе праве купе је 36π см. Изводница купе нагнута је према равни основе под углом од 45° . Израчунати:

- A) површину купе;
B) запремину купе.

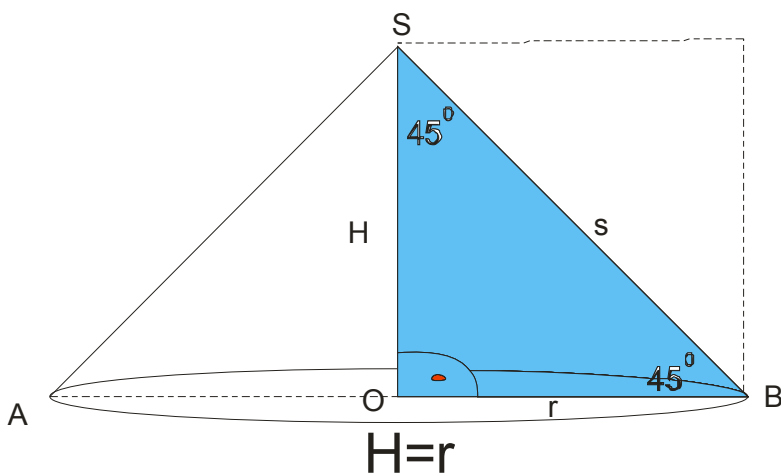


$$O = 36\pi \text{ cm}$$

A) $P = ?$

B) $V = ?$

Uočimo najpre na slici trougao BOS.



On je očigledno jednakokrako pravougli trougao! To nam govori da je $H = r$. Izvodnica s je ustvari dijagonala kvadrata čija je stranica r .

Iz obima osnove ćemo naći poluprečnik r , onda istovremeno imamo i H , a izvodnica s ćemo kao dijagonalu

kvadrata naći kao : $s = r\sqrt{2}$

$$O = 2r\pi$$

$$36\pi = 2r\pi$$

$$36 = 2r$$

$$r = 18\text{ cm} \rightarrow H = 18\text{ cm} \rightarrow s = 18\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$P = r\pi(r + s)$$

$$P = 18\pi(18 + 18\sqrt{2}) \text{ ovde, ako se setite, izvučite 18 kao zajednički ispred zagrade}$$

$$P = 18\pi \cdot 18(1 + \sqrt{2})$$

$$P = 324\pi(1 + \sqrt{2})\text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$$

$$V = \frac{1}{3}18^2\pi \cdot 18$$

$$V = \frac{1}{3}324 \cdot \pi \cdot 18$$

$$V = 1944\pi \text{ cm}^3$$

342. Гомила песка има облик купе чији је обим основе 8π m, а висина 3 m. Колико кубних метара песка има у тој гомили?

$$O = 8\pi \text{ m}$$

$$H = 3 \text{ m}$$

$$V = ?$$

$$O = 2r\pi$$

$$8\pi = 2r\pi$$

$$2r = 8$$

$$r = 4 \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$$

$$V = \frac{1}{3}4^2\pi \cdot 3$$

$$V = 16\pi \text{ m}^3$$