

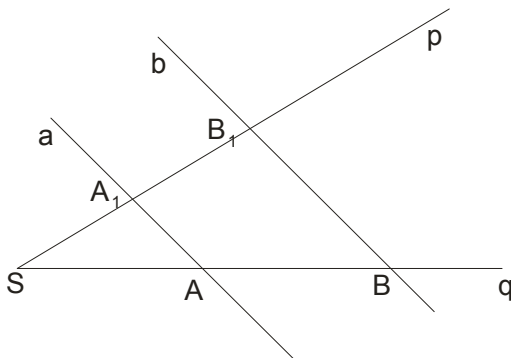
6. UČENIK UME DA PRIMENI PODUDARNOST I SLIČNOST TROUGLOVA, POVEZUJUĆI TAKO RAZNA SVOJSTVA GEOMETRIJSKIH OBJEKATA

O podudarnosti smo već govorili, podsetimo se sada važnih stvari vezanih za sličnost trouglova...

Talesova teorema:

Ako paralelne prave a i b presecaju pravu p u tačkama A i B , a pravu q u tačkama A_1 i B_1 i ako je S zajednička tačka pravih p i q , tada važi:

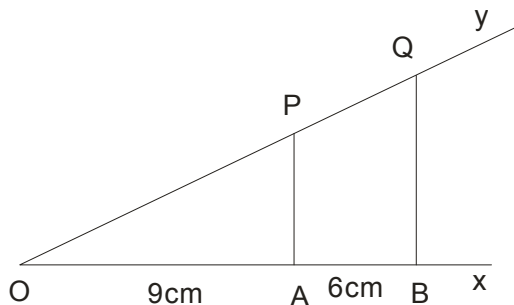
$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA}{SB} = \frac{SA_1}{SB_1}$$



Primer 1:

Dve paralelne prave seku krak O_x jednog ugla u tačkama A i B , a krak O_y u tačkama P i Q . Ako su podaci kao na crtežu, odrediti:

- A) $OP : PQ$
- B) $OQ : OP$

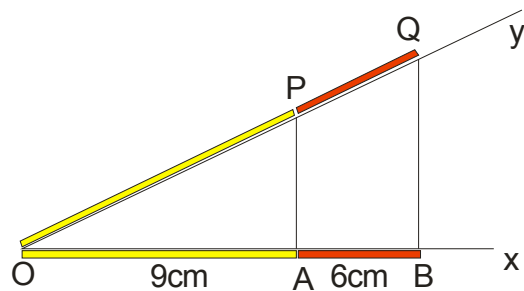


Rešenje:

A)

Najpre na polupravo O_y uočimo date duži OP i PQ . Dalje razmišljamo koje duži su njima odgovarajuće na O_x . To su OA koja odgovara duži OP i AB koja odgovara duži PQ .

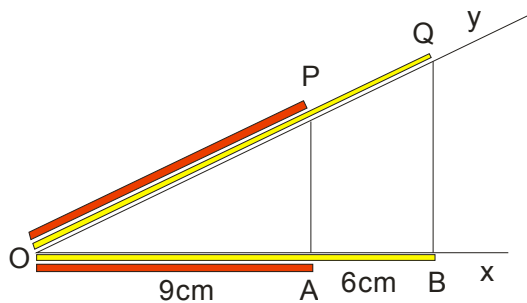
Pogledajmo to i na slici



Koristimo Talesovu teoremu:

$OP : PQ = OA : AB = 9 : 6$ i ako malo skratimo sa 3, dobijamo $OP : PQ = OA : AB = 9 : 6 = 3 : 2$

B) $OQ : OP = ?$



Duži OQ odgovara duž OB (pazi : $OB = 9 + 6 = 15$) dok duži OP odgovara duž OA.

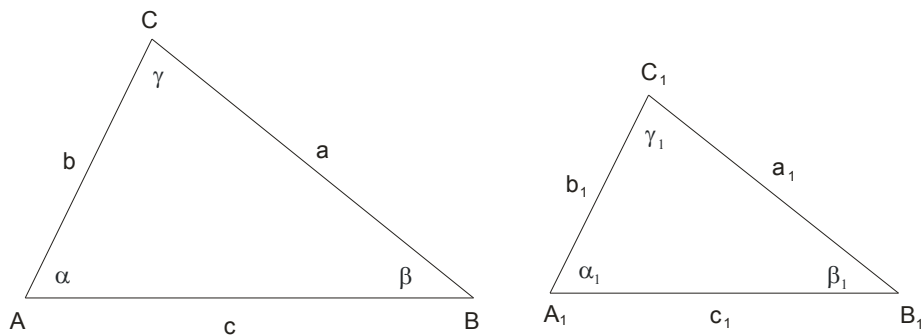
Dakle

$OQ : OP = OB : OA = 15 : 9$ i ako opet malo skratimo sa 3, dobijamo

$OQ : OP = OB : OA = 15 : 9 = 5 : 3$

Sličnost je preslikavanje neke figure F u figuru F_1 tako da je razmera odgovarajućih duži figura F i F_1 isti broj i ako su odgovarajući uglovi jednaki.

Za utvrđivanje sličnosti trouglova koristimo četiri stava:



I stav

Dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ su slična ako i samo ako je jedan par stranica jednog trougla proporcionalan paru stranica drugog, a uglovi zahvaćeni ovim stranicama jednaki su među sobom.

II stav

Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ su slični ako i samo ako su dva ugla jednog trougla jednaka sa dva odgovarajuća ugla drugog.

III stav

Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ su slični ako i samo ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

IV stav

Dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ su slična ako i samo ako su dve stranice jednog trougla proporcionalne odgovarajućim stranicama drugog, uglovi naspram dveju od tih odgovarajućih stranica jednaki, a naspram drugih dveju odgovarajućih stranica su oba ugla oštra, oba prava ili oba tupa.

U zadacima, pošto zaključimo da su neka dva trougla slična, primenjujemo:

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = O : O_1 = k$$

Naravno:

$O = a + b + c$ je obim prvog trougla a

$O_1 = a_1 + b_1 + c_1$ je obim drugog trougla

k je koeficijent sličnosti

Vrlo lako možemo zaključiti da važe i sledeće proporcionalnosti:

$$a : a_1 = t_a : t_{a_1} = h_a : h_{a_1}$$

$$b : b_1 = t_b : t_{b_1} = h_b : h_{b_1}$$

$$c : c_1 = t_c : t_{c_1} = h_c : h_{c_1}$$

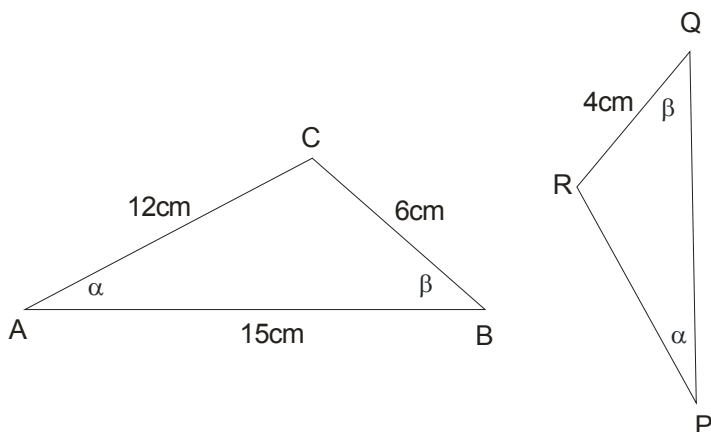
$$P : P_1 = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c^2 : c_1^2$$

Naravno ovde su:

t - težišne duži, h - visine i P - površine sličnih trouglova.

Primer 1.

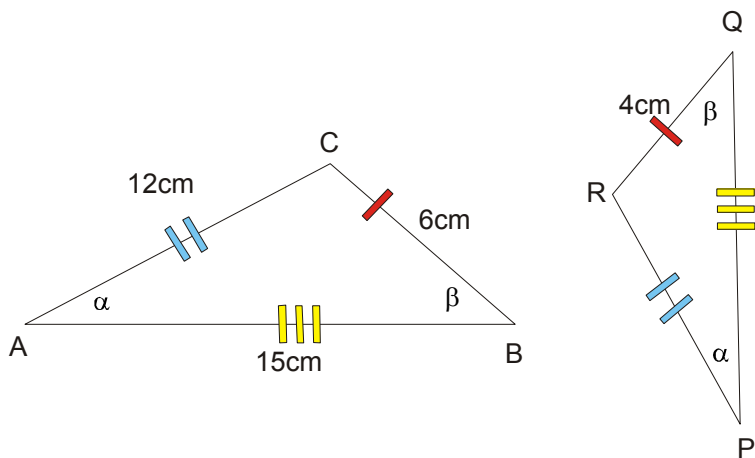
Na crtežu su dati podaci o trouglovima ABC i PQR. Odrediti dužine stranica PQ i PR trougla PQR.



Rešenje:

Uočimo najpre da su trouglovi slični po **II stavu** o sličnosti trouglova. Dalje predložimo da sa crticama obeležite koja kojoj stranici odgovara.

Pogledajte na sledećoj slici:



Kako imamo podatke za najmanje duži (sa po jednom crvenom crtikom) one će biti na početku proporcije...

$$BC : RQ = AC : PR$$

$$6 : 4 = 12 : PR$$

$$6 \cdot PR = 4 \cdot 12$$

$$PR = \frac{48}{6}$$

$$PR = 8cm$$

$$BC : RQ = AB : PQ$$

$$6 : 4 = 15 : PQ$$

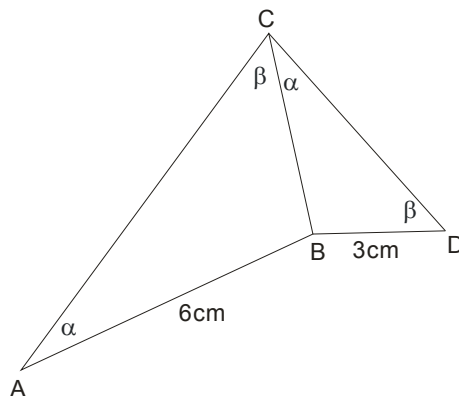
$$6 \cdot PQ = 4 \cdot 15$$

$$PQ = \frac{60}{6}$$

$$PQ = 10cm$$

Primer 2.

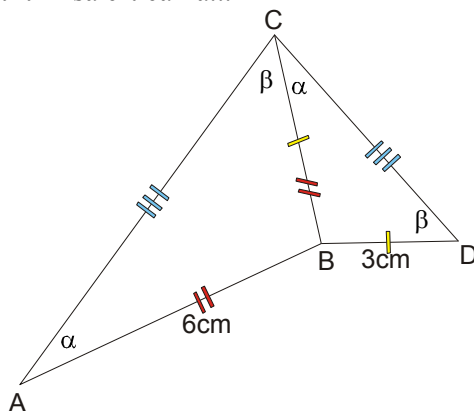
Ako su oznake i podaci kao na priloženom crtežu, odrediti dužinu zajedničke stranice BC trouglova ABC i CBD.



Rešenje:

Kao i u prethodnom primeru, trouglovi ABC i CBD su slični po **II stavu**, jer imaju po dva odgovarajuća ugla jednaka.

I ovde ćemo upotrebiti trik sa crticama...



Uočimo dalje da nam stranice sa po tri crtice (najduže) ne trebaju, jer nijedna od njih nema datu dužinu.

Moramo paziti jer je zajednička stranica BC istovremeno najkraća za trougao ABC i srednja po dužini za trougao BDC. Dakle:

$$AB : BC = BC : BD$$

$$6 : BC = BC : 3$$

$$BC \cdot BC = 6 \cdot 3$$

$$|BC|^2 = 18$$

$$BC = \sqrt{18}$$

$$BC = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Primer 3.

Stranice trougla ABC su $a = 12\text{cm}$, $b = 18\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$. Odrediti obim njemu sličnog trougla čija je najduža stranica 27cm .

Rešenje:

Ovde ćemo upotrebiti:

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = O : O_1 = k$$

Najpre se pitamo : **koja je to stranica u sličnom trouglu data?**

Pa pošto je b najduža stranica u prvom trouglu , to je $b_1 = 27\text{cm}$.

Dalje računamo obim prvog trougla:

$$O = a + b + c$$

$$O = 12 + 18 + 8$$

$$O = 38\text{cm}$$

Sada koristimo deo ove velike proporcije koji nam treba:

$$b : b_1 = O : O_1$$

$$18 : 27 = 38 : O_1$$

$$18 \cdot O_1 = 27 \cdot 38$$

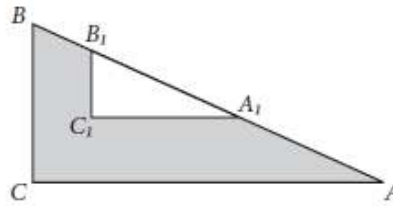
$$O_1 = \frac{27 \cdot 38}{18}$$

$$O_1 = 57\text{cm}$$

www.matematiranje.in.rs

Pogledajmo sada i nekoliko primera iz zbirke za pripremu male mature 2012. godine.

296. Из правоуглог троугла ABC изрезан је правоугли троугао $A_1B_1C_1$ при чему је BC паралелно са B_1C_1 . Ако је $AC = 12$ cm, $BC = 5$ cm и $A_1B_1 = 3,25$ cm, колика је површина ошенченог дела троугла ABC ?



Прикажи поступак.

Површина ошенченог дела троугла на слици је _____ cm^2 .

Rešenje:

Обавезно погледajte припремни fajl SLIČNOST !

Применом Питагорине теореме, најпре најдемо дужину хипотенузе AB

$$AB^2 = 12^2 + 5^2$$

$$AB^2 = 144 + 25$$

$$AB^2 = 169 \rightarrow \boxed{AB = 13cm}$$

Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су слични јер имају сва три једнака угла.

Из њихове сличности произилази пропорционалност одговарајућих странаца!

На слици смо различитим бојама оbeležili која странаца којој одговара:

$$B_1C_1 : BC = A_1B_1 : AB$$

$$B_1C_1 : 5 = 3,25 : 13$$

$$13 \cdot B_1C_1 = 3,25 \cdot 5$$

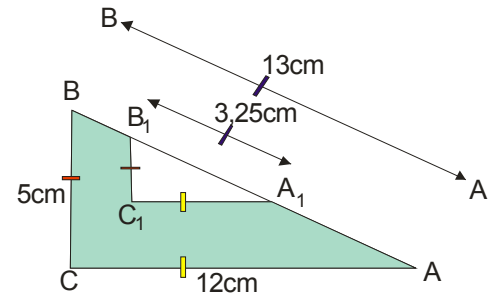
$$B_1C_1 = \frac{3,25 \cdot 5}{13} \rightarrow \boxed{B_1C_1 = 1,25cm}$$

$$A_1C_1 : BC = A_1B_1 : AB$$

$$A_1C_1 : 12 = 3,25 : 13$$

$$13 \cdot A_1C_1 = 3,25 \cdot 12$$

$$A_1C_1 = \frac{3,25 \cdot 12}{13} \rightarrow \boxed{A_1C_1 = 3cm}$$



Сад најдемо површину целог троугла ABC , па површину малог троугла $A_1B_1C_1$ и одузмемо их!

$$P_{ABC} = \frac{12 \cdot 5}{2}$$

$$P_{A_1B_1C_1} = \frac{1,25 \cdot 3}{2}$$

Сад их одузмемо: $P = 30 - 1,875 = 28,125cm^2$

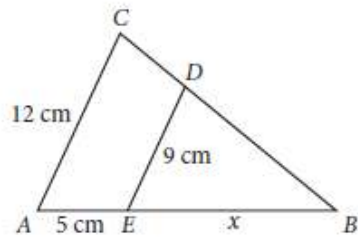
$$\boxed{P_{ABC} = 30cm^2}$$

$$\boxed{P_{A_1B_1C_1} = 1,875cm^2}$$

Површина ошенченог дела троугла на слици је $28,125cm^2$.

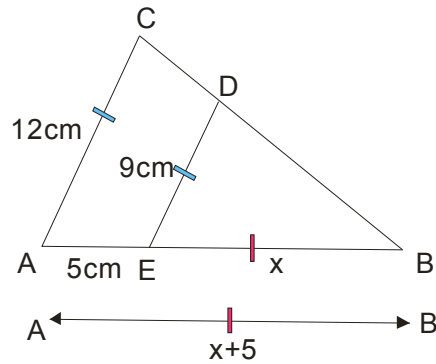
297. На слици је $AC \parallel ED$. Израчунај дужину дужи EB .

Прикажи поступак.



$EB = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm.}$

Rešenje:



Uočimo da su trouglovi ABC i BDE slični (imaju jednake uglove). Onda je:

$$AB : BE = AC : DE$$

$$(x + 5) : x = 12 : 9$$

$$9(x + 5) = 12x$$

$$9x + 45 = 12x$$

$$9x - 12x = -45$$

$$-3x = -45$$

$$x = 15 \text{ cm}$$

$$\mathbf{EB = 15 \text{ cm}}$$

www.matematiranje.in.rs

298. Обим једнакокраког троугла је 40 cm. Крак троугла је за 2 cm дужи од основице.
 Израчунај обим њему сличног троугла чија је основица 18 cm.

Прикажи поступак.

Обим тог троугла је ____ cm.

Rešenje:

Prvo ćemo izračunati dužinu osnovice i kraka prvog trougla.

$$O = 40 \text{ cm}$$

$$b = a + 2$$

$$O = a + 2b$$

$$40 = a + 2(a + 2)$$

$$40 = a + 2a + 4$$

$$40 = 3a + 4$$

$$3a = 40 - 4$$

$$3a = 36$$

$$a = 12 \text{ cm} \rightarrow b = 14 \text{ cm}$$

sad idemo na formulu:

$$a : a_1 = O : O_1$$

$$12 : 18 = 40 : O_1$$

$$12O_1 = 18 \cdot 40$$

$$O_1 = \frac{18 \cdot 40}{12}$$

$$O_1 = 60 \text{ cm}$$

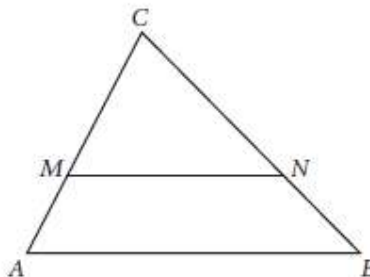
Обим тог троугла је 60 cm.

299. Дуж MN је паралелна са дужи AB.
 Ако је $MN : AB = 2 : 3$, колика је размера $CM : MA$?

Прикажи поступак.

Заокружи слово испред тачног одговора.

- a) 2 : 1
- б) 3 : 1
- в) 3 : 2
- г) 2 : 3

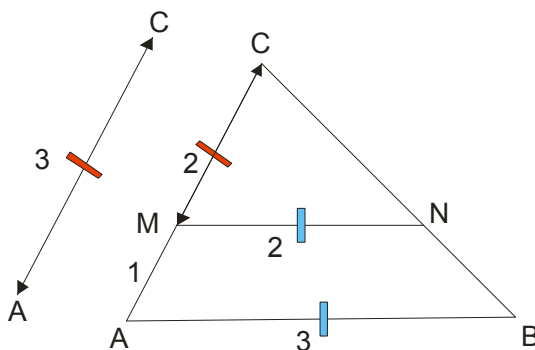


Rešenje:

$$MN : AB = 2 : 3$$

$$CM : AC = 2 : 3$$

$$CM : MA = 2 : 1$$



Treba zaokružiti odgovor pod a) 2:1

- a) 2 : 1
- б) 3 : 1
- в) 3 : 2
- г) 2 : 3

300. Код тачног тврђења заокружи реч Тачно, а код нетачног тврђења реч Нетачно.

Свака два једнакостранична троугла међусобно су слична. Тачно Нетачно

Свака два слична троугла имају једнаке обиме. Тачно Нетачно

Два једнакокрана троугла са углом при врху од 36° су слични троуглови. Тачно Нетачно

Сви правоугли троуглови међусобно су слични. Тачно Нетачно

Rešenje:

Svaka dva jednakostrična trougla su slična , jer imaju iste uglove od po 60° . TAČNO

Svaka dva slična trougla imaju jednake obime . NETAČNO

Dva jednakokraka trougla sa uglom pri vrhu od 36° su slični trouglovi. TAČNO

Objašnjenje: onda će im i uglovi na osnovici biti jednaki : po 72°

Svi pravougli trouglovi medjusobno su slični. NETAČNO

Objašnjenje: oni imaju jedan ugao isti (od 90°) ali ostala dva mogu biti različita.

Dakle, zaokružujemo:

Свака два једнакостранична троугла међусобно су слична. Тачно Нетачно

Свака два слична троугла имају једнаке обиме. Тачно Нетачно

Два једнакокрана троугла са углом при врху од 36° су слични троуглови. Тачно Нетачно

Сви правоугли троуглови међусобно су слични. Тачно Нетачно