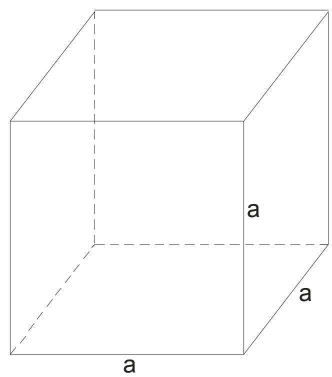
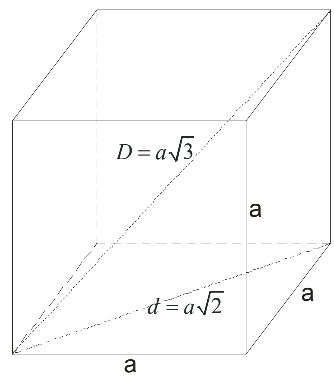
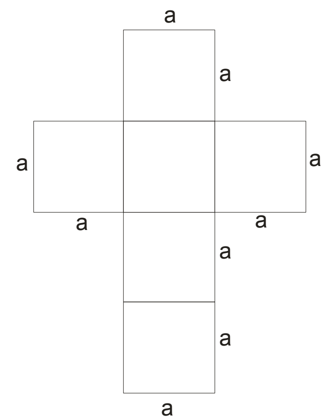
4. UČENIK UME DA IZRAČUNA POVRŠINU I ZAPREMINU PRIZME I PIRAMIDE U SLUČAJEVIMA KADA NEOPHODNI ELEMENTI NISU DATI

KOCKA







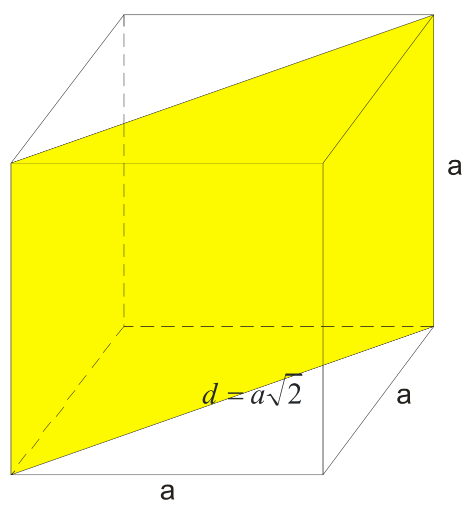
mreža kocke

$$P = 6a^2 \qquad V = a^3$$

Kocka ima 12 ivica dužine a.

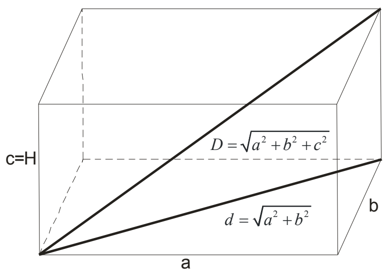
Mala dijagonala (dijagonala osnove) je $d = a\sqrt{2}$.

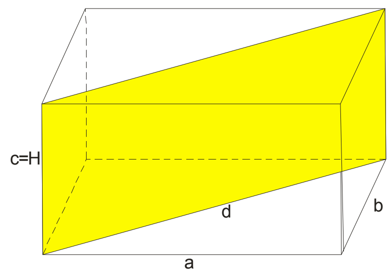
Velika (telesna) dijagonala je $D = a\sqrt{3}$



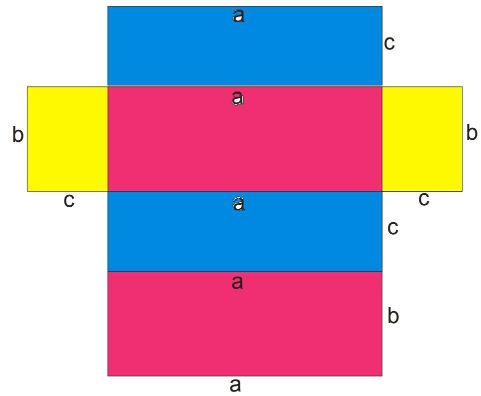
dijagonalni presek

Površina dijagonalnog preseka se računa po formuli: $P_{DP} = a^2\sqrt{2}$





dijagonalni presek



mreža kvadra

$$P = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

Mala dijagonala (dijagonala osnove) se računa $d^2 = a^2 + b^2$ to jest $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Velika dijagonala se računa $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ to jest $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Dijagonalni presek je pravougaonik površine $P_{DP} = d \cdot c$

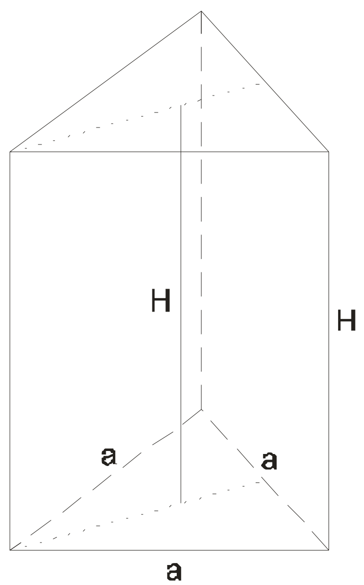
Površina svake prizme se izražava formulom:

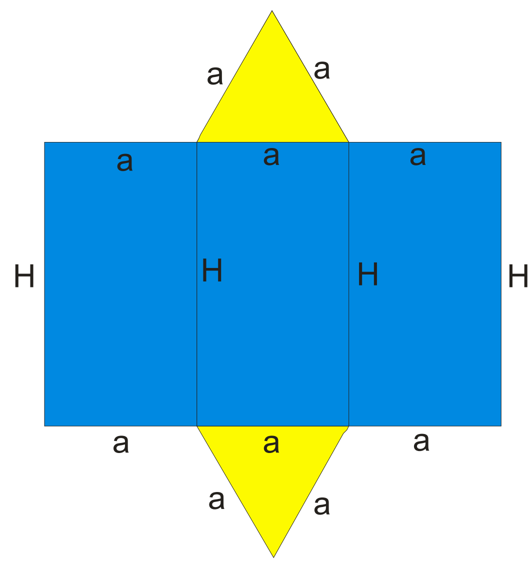
$$P = 2B + M$$

Zapremina svake prizme se izračunava formulom:

$$V = B \cdot H$$

PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PRIZMA





mreža

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$ je površina osnove(baze)

$$M = 3aH$$ je površina omotača

$$P = 2B + M$$

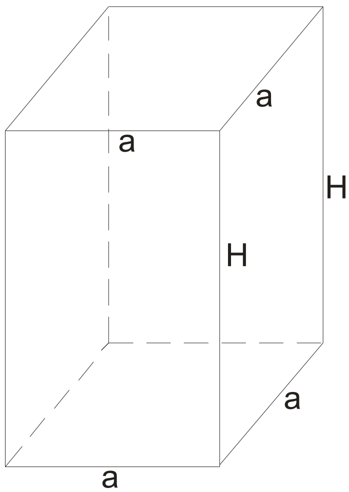
$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

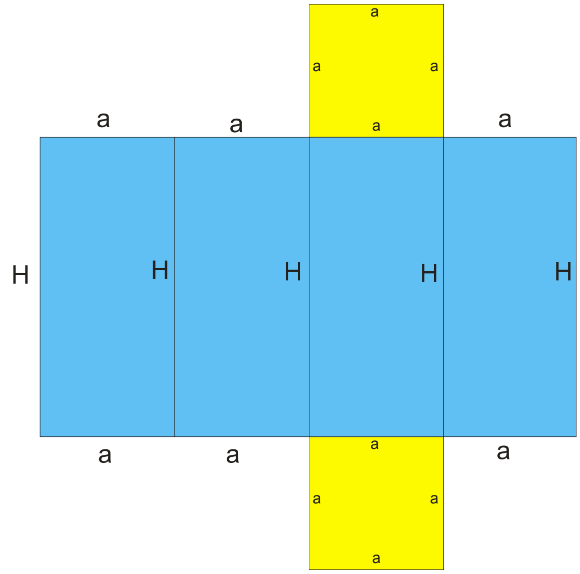
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PRIZMA

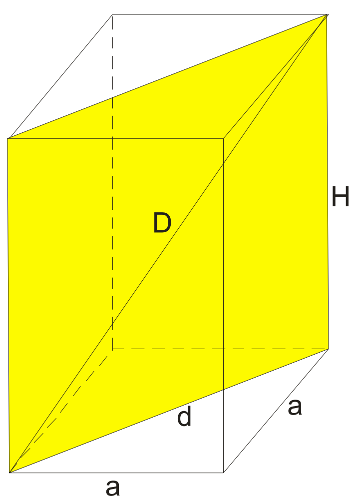




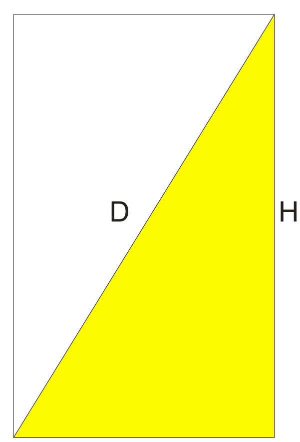
Površina baze i površina omotača su: $B = a^2$ $\quad\quad$ $M = 4aH$

$$P = 2B + M \qquad\qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2a^2 + 4aH \qquad\qquad V = a^2 \cdot H$$



dijagonalni presek



$d = a\sqrt{2}$

dijagonalni presek

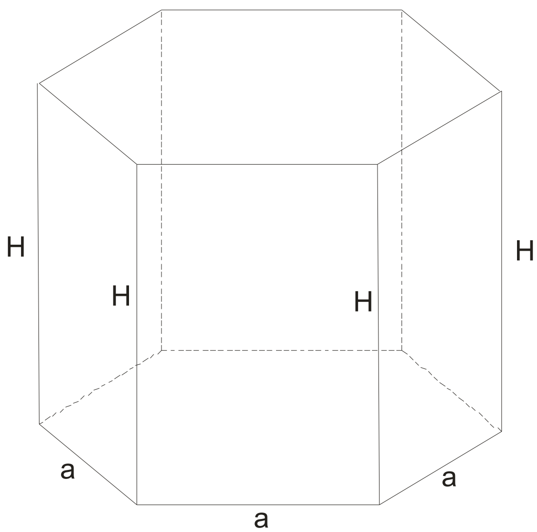
$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + H^2$

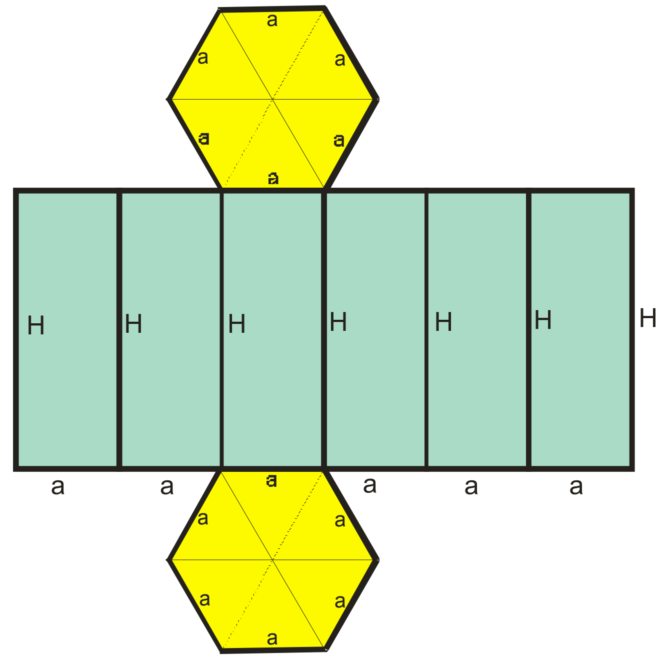
Površina dijagonalnog preseka se izračunava:

$$P = d \cdot H$$

$$P = aH\sqrt{2}$$

PRAVA PRAVILNA ŠESTOSTRANA PRIZMA





Površina baze i omotača su:

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad M = 6aH$$

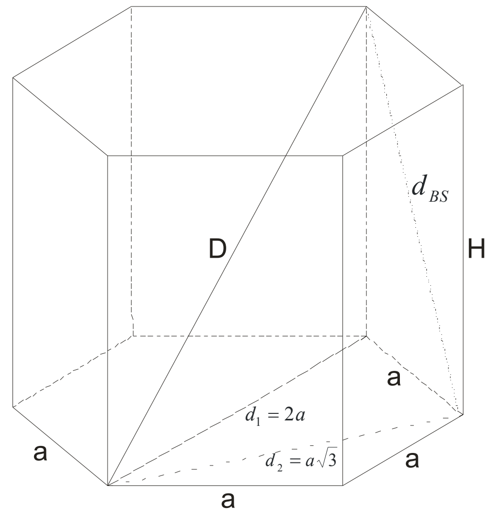
Površina i zapremina cele takve prizme je:

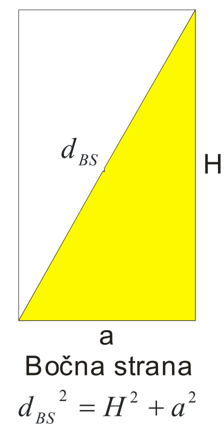
$$P = 2B + M \qquad\qquad V = B \cdot H$$

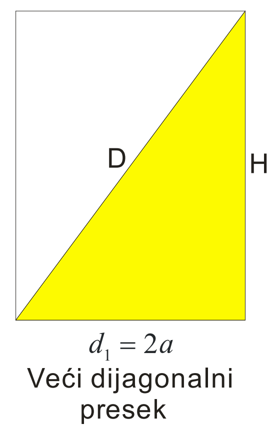
$$P = 2 \cdot 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH \qquad\qquad V = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$$

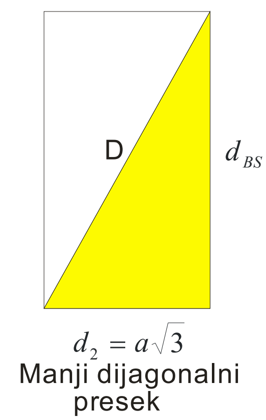
$$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH \qquad\qquad V = \frac{3a^2H\sqrt{3}}{2}$$

Što se tiče primene Pitagorine teoreme, imamo sledeće situacije:

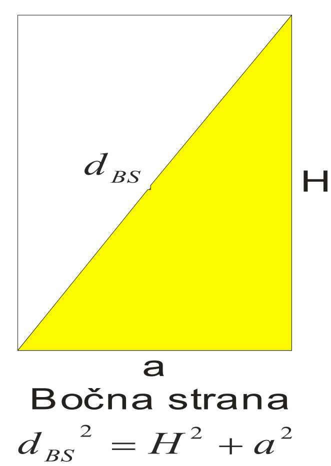








Još samo da vam napomenemo da primena Pitagorine teoreme na bočnu stranu :

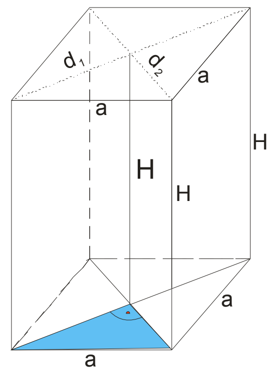


važi kod svake od navedenih pravilnih prizmi!

Često se u zadacima javljaju prizme koje nisu pravilne, odnosno u osnovi se ne nalazi pravilan mnogougao.

Evo nekoliko čestih situacija:

Ako je u osnovi romb



Ovde Pitagorinu teoremu primenjujemo u osnovi:

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2$$

Površina baze je $B=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ a površina omotača je $M=4aH$

Površina i zapremina ove prizme je:

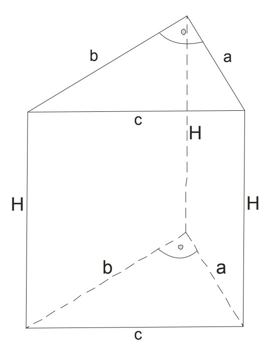
$$P=2B+M$$

$$P=2\frac{d_1\cdot d_2}{2}+4aH\rightarrow\boxed{P=d_1\cdot d_2+4aH}$$

$$V=BH$$

$$\boxed{V=\frac{d_1\cdot d_2}{2}\cdot H}$$

Ako je u osnovi pravougli trougao



Površina baze je $B=\frac{ab}{2}$ ili $B=\frac{ch_c}{2}$ a površina omotača: $M=aH+bH+cH\rightarrow\boxed{M=H(a+b+c)}$

$$P=2B+M$$

$$P=2\frac{ab}{2}+H(a+b+c)\rightarrow\boxed{P=ab+H(a+b+c)}$$

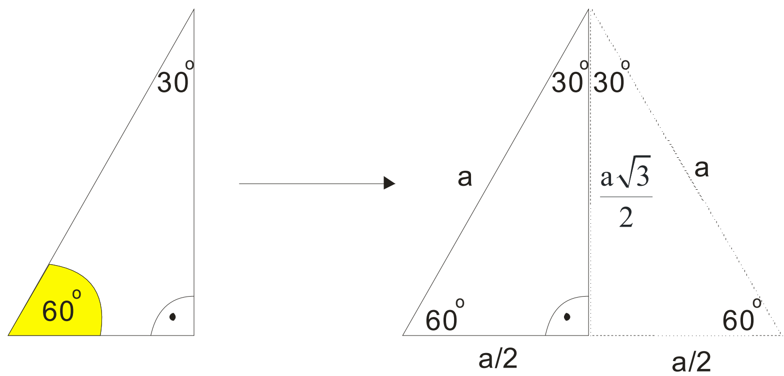
$$V=BH$$

$$\boxed{V=\frac{ab}{2}\cdot H}$$

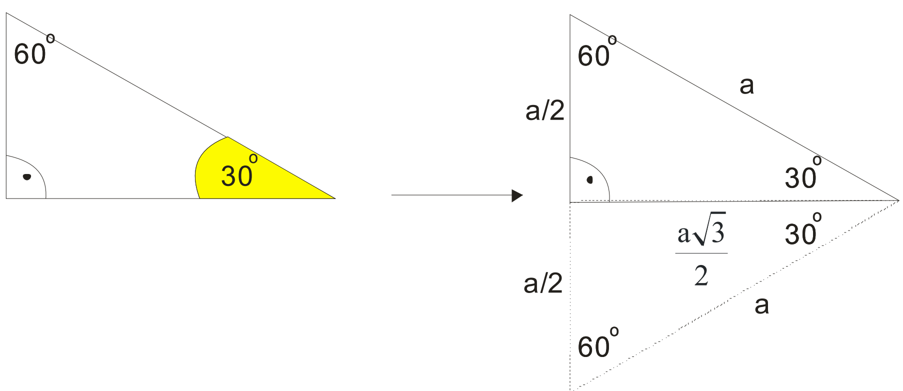
Dalje, u zadacima sa prizmom često se daju uglovi (u osnovi, izmedju dijagonale i osnove itd.) od 30 , 60 i 45 stepeni.

Šta raditi u situaciji kad je dat ugao od 30 ili 60 stepeni ?

Onda vršimo dopunu do jednakostraničnog trougla i tražimo vezu izmedju poznatih i nepoznatih podataka!

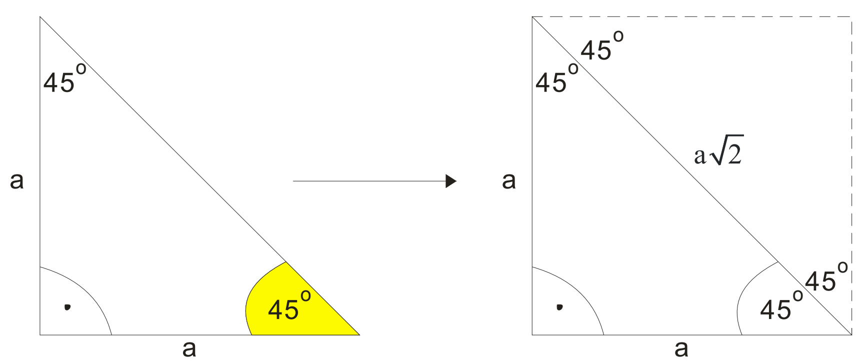


Ovo je situacija kad je dat ugao od 60 stepeni.



Ovo je situacija kad je dat ugao od 30 stepeni.

Kada nam je dat ugao od 45 stepeni vršimo dopunu do punog kvadrata!



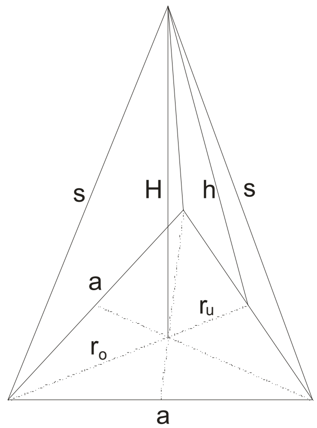
SAVETI:

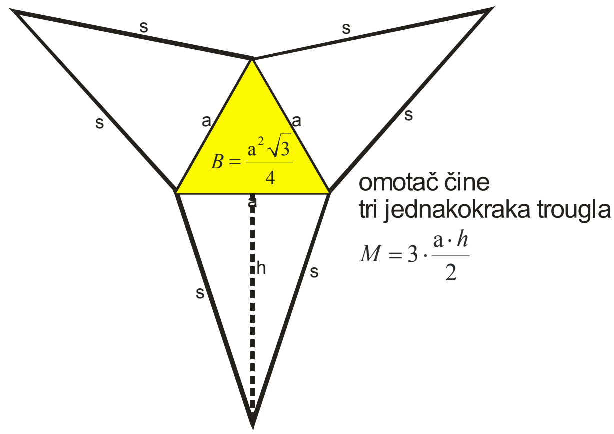
1. Napravite modele ovih prizmi koristeći mreže koje smo vam nacrtali, tako ćete bolje uočavati vezu izmedju elemenata.

2. Nemojte formule da učite napamet, nego koristeći model naučite najpre da nacrtate sliku a zatim da sa nje "sklopite" traženu formulu

3. Ako vam je u zadatku data B, M, V ili P , napišete formulu za to i tu zamenite sve što je dato. Dobićete novi podatak….

PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PIRAMIDA





U omotaču se nalaze tri jednakokraka trougla (površina jednog od njih je $P_{bočne\ strane}=\frac{a\cdot h}{2}$) , a kako ih ima 3 u omotaču, to je: $M=3\frac{a\cdot h}{2}$

Formule za **površinu i zapreminu** će biti:

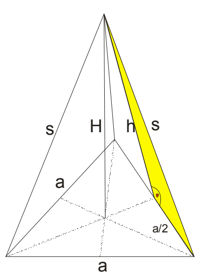
$$P=B+M$$

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\frac{a\cdot h}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}B\cdot H$$

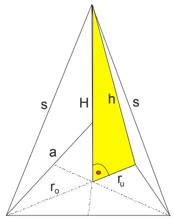
$$V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$$

$$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\cdot H$$



$$s^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

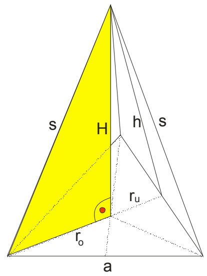
Ova Pitagorina teorema je ima kod svake piramide!



$h^2=H^2+r_u^2$ to jest

$$h^2=H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

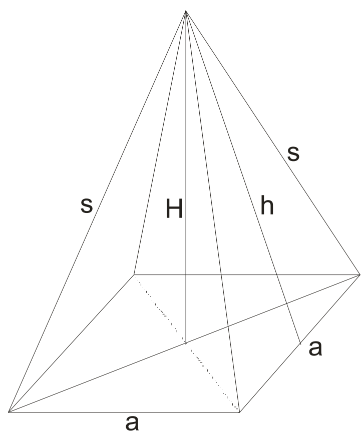
E ova i sledeća su samo za trostranu piramidu (pravu i pravilnu)

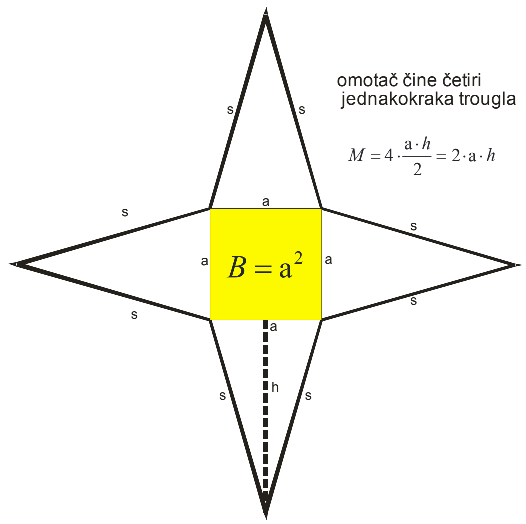


$$s^2 = H^2 + r_o^2 \quad \text{to jest}$$

$$s^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PIRAMIDA





Površine baze i omotača su dakle:

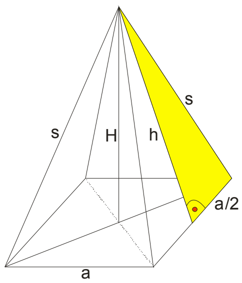
$B = a^2$ i $M = 4\dfrac{a \cdot h}{2}$ odnosno $M = 2ah$

A površina i zapremina cele piramide su:

$$P = B + M \qquad V = \frac{1}{3} B \cdot H$$

$$P = a^2 + 2ah \qquad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot H$$

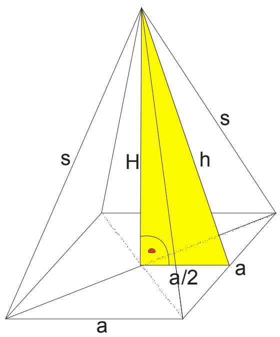
Pitagorina teorema se primenjuje:



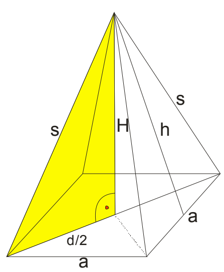
$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Ovo je ona što važi za svaku piramidu.

Sledeće dve su samo za pravu pravilnu četvorostranu:



$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

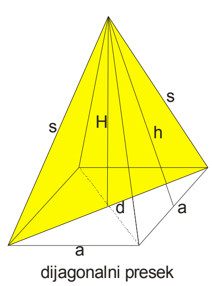


$$s^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{odnosno}$$

$$s^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \text{to jest}$$

$$s^2 = H^2 + \frac{a^2}{2}$$

Često se u zadacima daje i dijagonalni presek:

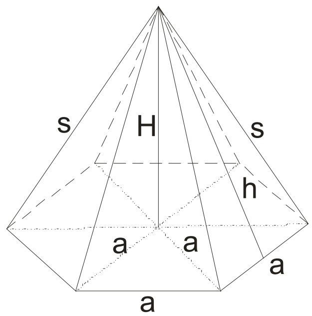


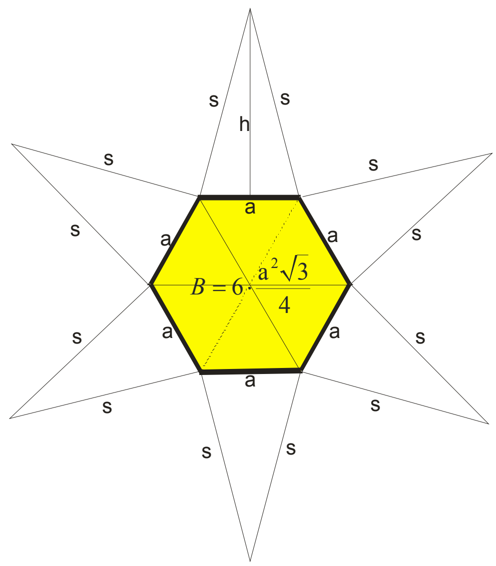
Površina dijagonalnog preseka(trougao) je:

$$P_{DP} = \frac{d \cdot H}{2} \quad \text{odnosno}$$

$$P_{DP} = \frac{a \cdot H\sqrt{2}}{2}$$

PRAVA PRAVILNA ŠESTOSTRANA PIRAMIDA





omotač čine šest
jednakokraka trougla

$$M = 6 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 3 \cdot a \cdot h$$

Površine baze i omotača su dakle:

$$B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad M = 6\frac{ah}{2} = 3ah$$

A površina i zapremina cele piramide su:

$$P = B + M$$

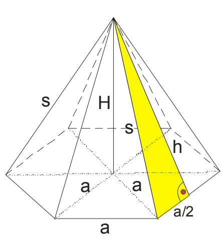
$$P = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$$

$$V = \frac{1}{3}BH$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$$

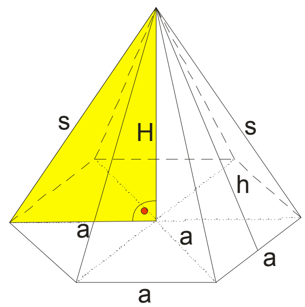
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$$

Pitagorina teorema se primenjuje na tri trougla (kao i kod prethodne dve piramide)

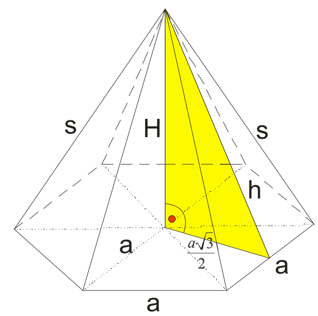


$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Ova važi kod svake….



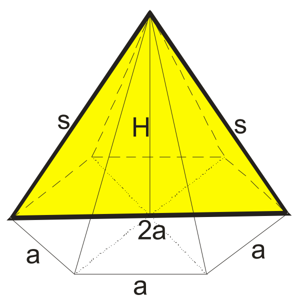
$$s^2 = H^2 + a^2$$



$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Kod šestostrane piramide razlikujemo dva dijagonalna preseka:

<u>Veći dijagonalni presek:</u>

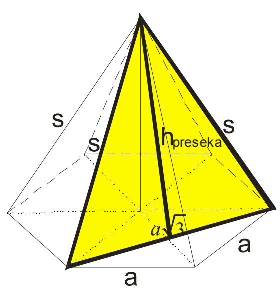


veći dijagonalni presek

P ovog dijagonalnog preseka je :

$$P_{vdp} = \frac{2a \cdot H}{2} \quad \text{to jest} \quad P_{vdp} = a \cdot H$$

<u>Manji dijagonalni presek:</u>



manji dijagonalni presek

P ovog dijagonalnog preseka je :

$$P_{mdp} = \frac{a\sqrt{3} \cdot h_{preseka}}{2}$$

SAVET:

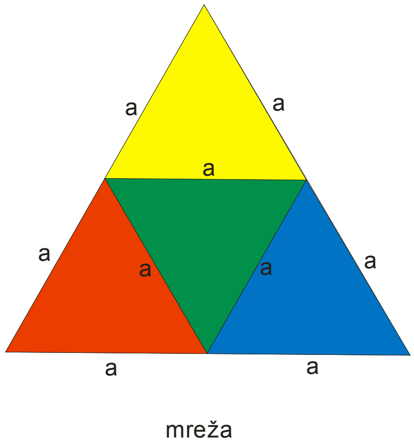
Pre nego što krenete sa proučavanjem zadataka, naučite formule i da nacrtate piramidu!

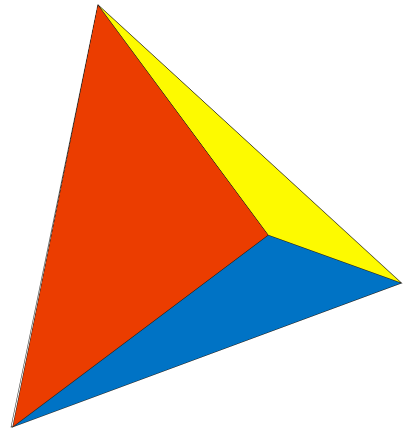
Ali , ako formule učite napamet, one ostanu u glavi dva - tri dana i ispare....

Zato naučite da formule sklapate “čitajući”sa slike!

Recimo , kažu u zadatku da se radi o pravoj pravilnoj jednakoivičnoj trostranoj piramidi.

Kako će izgledati formule za površinu i zapreminu?



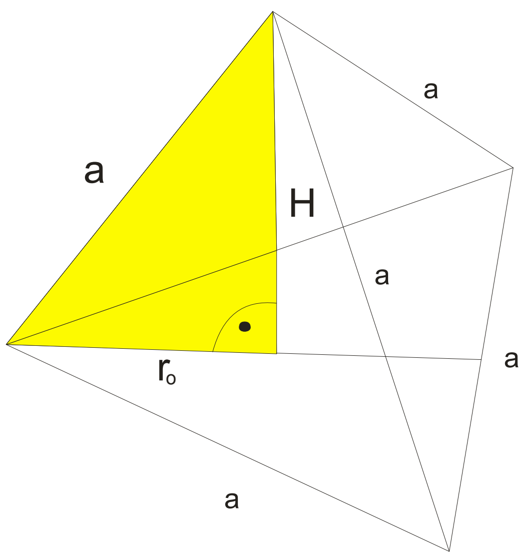


Kao što vidimo, njena površina se sastoji iz 4 jednakostranična trougla pa je:

$$P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{P = a^2\sqrt{3}}$$

Za zapreminu će nam trebati i visina izražena preko osnovne ivice. Primenjujemo Pitagorinu teoremu:



$$r_0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$H^2 + r_o^2 = a^2$$

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2$$

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$H^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9} = \frac{9a^2 - 3a^2}{9}$$

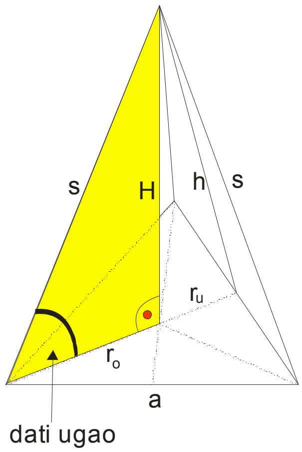
$$H^2 = \frac{6a^2}{9} \to H = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} \to \boxed{H = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

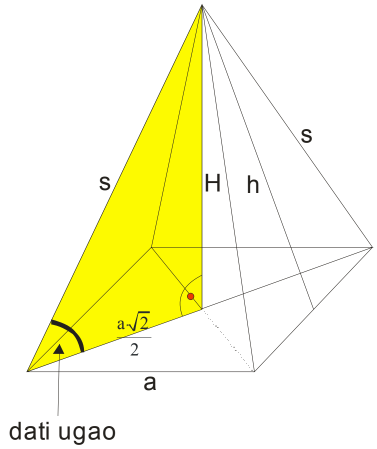
I sad je lako naći i zapreminu.

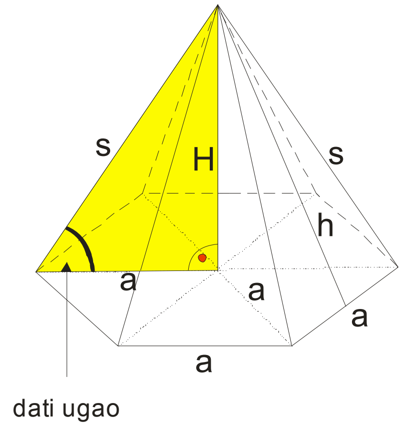
Često se u zadacima daje ugao od 30, 60 ili 45 stepeni.

Da objasnimo o kom uglu se radi!

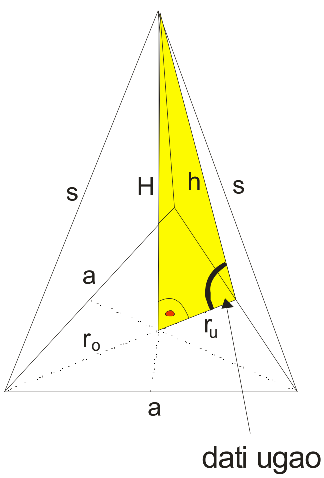
Ako u tekstu zadatka piše da je to ugao BOČNE IVICE PREMA RAVNI OSNOVE onda se radi o uglu:

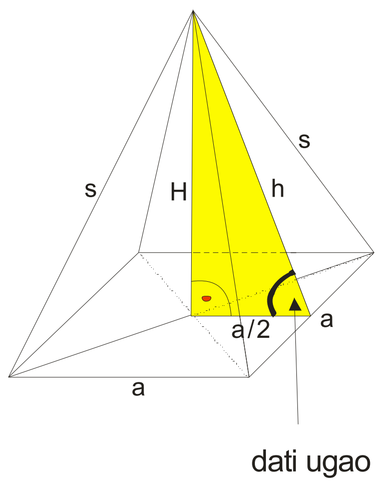


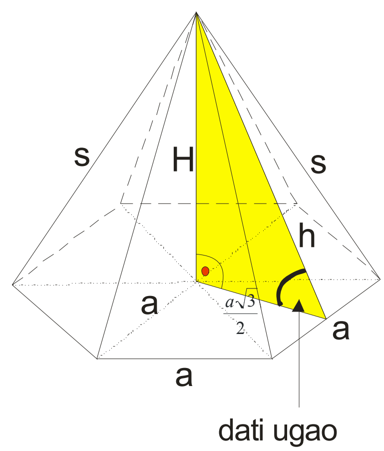




Ako u tekstu zadatka piše da je to ugao BOČNE STRANE PREMA RAVNI OSNOVE onda se radi o uglu:







Evo sada uradjenih primera iz zbirke za pripremu male mature 2012. godine:

286. Срђан жели да Петру поклони лопту и потребна му је одговарајућа кутија. Обим великог круга лопте је 125,6 cm. У продавници се налазе кутије у облику коцке. Одабери кутију најмање запремине у коју ће стати лопта.

Прикажи поступак.

Заокружи слово испред тачног одговора.

а) кутија ивице 50 cm

б) кутија ивице 40 cm

в) кутија ивице 30 cm

г) кутија ивице 20 cm

Rešenje:

Iz obima velikog kruga lopte ćemo izračunati poluprečnik lopte:

$O = 2r\pi$

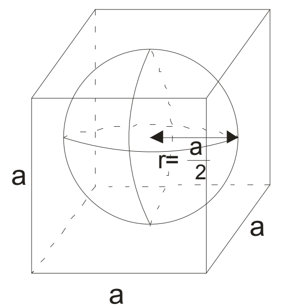
$125,6 = 2r \cdot 3,14$

$125,6 = 6,28r$

$r = \frac{125,6}{6,28}$

$\boxed{r = 20cm}$

Pogledajmo sliku:



Vidimo da je poluprečnik lopte jednak polovini stranice kocke. Onda je a= 2r , pa je a = 40cm.

Odgovor na postavljeno pitanje je pod:

а) кутија ивице 50 cm

б) кутија ивице 40 cm

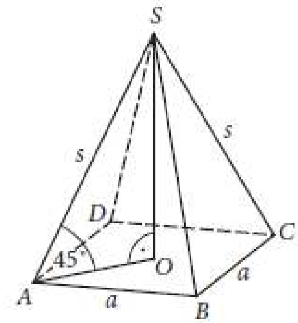
в) кутија ивице 30 cm

г) кутија ивице 20 cm

б) kutija ivice 40cm.

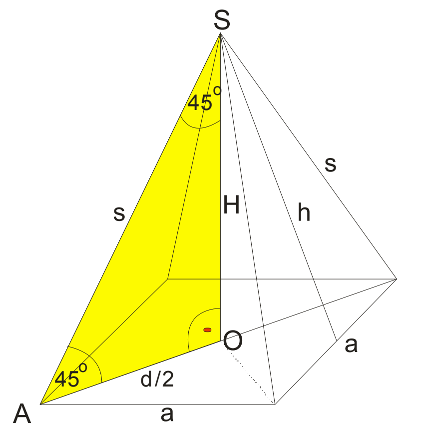
287. Правилна четворострана пирамида има запремину $V = 36\sqrt{2}\text{ cm}^3$. Троугао SAC је једнакокрако правоугли. Израчунај дужину основне ивице те пирамиде.

Прикажи поступак.



Дужина основне ивице је ____ cm.

Rešenje:



Trougao AOS je takodje jednakokrako pravougli, pa je : $H = \frac{d}{2} \rightarrow \boxed{H = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$

Podjimo sada od formule za zapreminu , jer nam je ona data.

$V = \frac{1}{3}a^2 H$ zamenimo da je $H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$V = \frac{1}{3}a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

$36\cancel{\sqrt{2}} = \frac{a^3\cancel{\sqrt{2}}}{6}$

$\frac{a^3}{6} = 36$

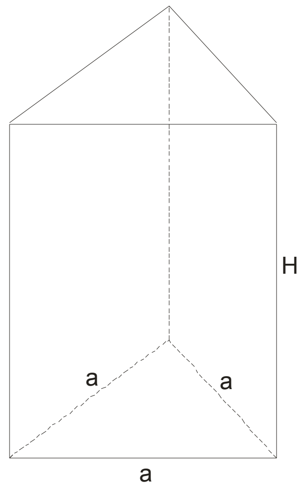
$a^3 = 36 \cdot 6$

$a^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 \rightarrow \boxed{a = 6cm}$

Dužina osnovne ivice je 6cm.

288. Површина правилне тростране призме је $P = 56\sqrt{3}$ cm², а основна ивица је 8 cm.
Колика је висина ове призме?
Прикажи поступак.
Висина ове призме је____cm.

Rešenje:



Krećemo od formule za površinu prizme:

$$P = 2B + M$$

$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

$$56\sqrt{3} = \frac{8^2\sqrt{3}}{2} + 3\cdot 8\cdot H$$

$$56\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{2} + 24\cdot H$$

$$56\sqrt{3} = 32\sqrt{3} + 24\cdot H$$

$$24\cdot H = 56\sqrt{3} - 32\sqrt{3}$$

$$24\cdot H = 24\sqrt{3}$$

$$H = \frac{\cancel{24}\sqrt{3}}{\cancel{24}} \rightarrow \boxed{H = \sqrt{3}cm}$$

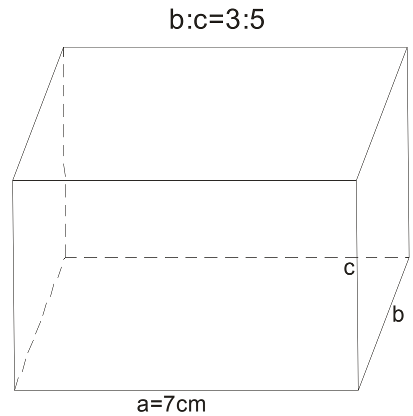
Visina ove prizme je $\sqrt{3}cm$.

289. Једна ивица квадра је 7 cm, а размера друге две ивице је 3 : 5. Колика је површина квадра ако је његова запремина 420 cm³?

Прикажи поступак.

Површина квадра је ___ cm².

Rešenje:



$a = 7cm$

$b : c = 3 : 5 \rightarrow b = 3k$ i c=5k

$\underline{V = 420cm^3}$

$P = ?$

$V = abc$

$420 = 7 \cdot 3k \cdot 5k$

$420 = 105k^2$

$k^2 = \frac{420}{105} \rightarrow k^2 = 4 \rightarrow \boxed{k = 2}$ vratimo u $b = 3k$ i c=5k

$b = 3 \cdot 2 = 6cm$

$c = 5 \cdot 2 = 10cm$

$P = 2(ab + ac + bc)$

$P = 2(7 \cdot 6 + 7 \cdot 10 + 6 \cdot 10)$

$P = 2(42 + 70 + 60)$

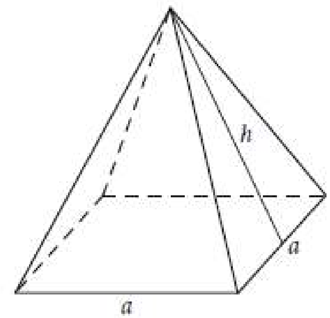
$P = 2 \cdot 172$

$\boxed{P = 344cm^2}$

Površina kvadra je 344cm ^{2} .

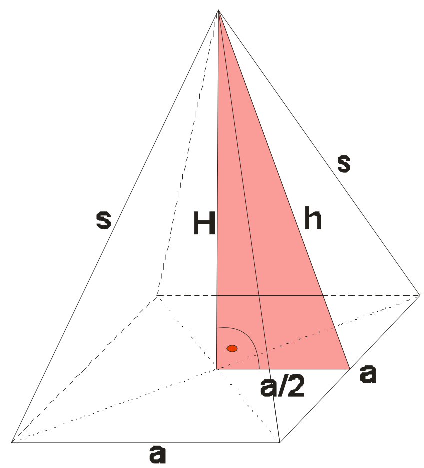
290. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде ако је ивица основе $a = 10$ cm, а висина бочне стране $h = 13$ cm.

Прикажи поступак.



Запремина пирамиде је ________ cm³.

Rešenje:



Primenom Pitagorine teoreme na označeni trougao ćemo naći dužinu visine piramide H.

$a = 10cm$

$\underline{h = 13cm}$

$V = ?$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 = h^2$$

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 + H^2 = 13^2$$

$$25 + H^2 = 169$$

$$H^2 = 169 - 25$$

$$H^2 = 144 \rightarrow H = \sqrt{144} \rightarrow \boxed{H = 12cm}$$

$$V = \frac{1}{3}BH$$

$$V = \frac{1}{3}a^2 H$$

$$V = \frac{1}{\cancel{3}}10^2 \cdot \cancel{12}^{4} \rightarrow V = 100 \cdot 4 \rightarrow \boxed{V = 400cm^3}$$

Zapremina piramide je $400cm^3$**.**