NEPOTPUNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE II REDA

I tip

Najprostije diferencijalne jednačine II reda su oblika $\boxed{y``=f(x)}$ **i rešavaju se dvostrukom integracijom.**

Primer 1. Reši diferencijalnu jednačinu: $y``=\frac{1}{\cos^2 x}$

Rešenje:

$y``=\frac{1}{\cos^2 x}$ **integralimo jednom da dobijemo** $y`$

$$y`=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$y`=tgx+C_1$$

Dodali smo konstantu C_1 **jer ćemo posle morati da dodamo još jednu,sad integralimo još jednom i gotov posao:**

$$y=\int(tgx+C_1)dx$$
$$y=\int tgxdx+\int C_1dx$$

Na stranu nadjemo vrednost prvog integrala, metodom smene.

$$\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\\ \sin xdx=-dt\end{array}\right|=\int\frac{-1}{t}dt=-\ln|t|=-\ln|\cos x|$$

Sad se vratimo u rešenje (evo celog postupka zajedno):

$$y``=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$y`=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$y`=tgx+C_1$$
$$y=\int(tgx+C_1)dx$$
$$y=\int tgxdx+\int C_1dx$$
$$y=\int tgxdx+C_1\int dx$$
$$\boxed{y=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2}$$

Ovo je opšte rešenje zadane diferencijalne jednačine!

Primer 2.

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y``=12x^2-4$ **a zatim i partikularno rešenje koje zadovoljava uslove:** $y`(0)=0$ **i** $y(2)=8$

Rešenje:

Tražimo najpre opšte rešenje dvostrukom integracijom:

$$y``=12x^2-4$$
$$y`=\int\left(12x^2-4\right)dx$$
$$y`=12\int x^2dx-4\int dx$$
$$y`=12\frac{x^3}{3}-4x+C_1$$
$$\boxed{y`=4x^3-4x+C_1}$$
$$y=\int\left(4x^3-4x+C_1\right)dx$$
$$y=4\int x^3dx-4\int xdx+C_1\int dx$$
$$y=4\frac{x^4}{4}-4\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$
$$\boxed{y=x^4-2x^2+C_1x+C_2}$$

Sad tražimo partikularno rešenje:

$y`(0)=0$ **nam govori da u** $\boxed{y`=4x^3-4x+C_1}$ **zamenimo** $x=0\wedge y`=0$ **( Pazi, ne u opšte rešenje, već i y`)**

$$y`=4x^3-4x+C_1$$
$$0=4\cdot 0^3-4\cdot 0+C_1\rightarrow\boxed{C_1=0}$$

Sad u opšte rešenje menjamo da je $y(2)=8$**, to jest** $x=2\wedge y=8$ **a već smo našli da je** $C_1=0$

$$y=x^4-2x^2+C_1x+C_2$$
$$8=2^4-2\cdot 2^2+0\cdot x+C_2$$
$$8=16-8+C_2\rightarrow\boxed{C_2=0}$$

Sad vrednosti konstanata zamenimo u opšte rešenje:

$$y=x^4-2x^2+C_1x+C_2$$
$$y=x^4-2x^2+0\cdot x+0$$
$$\boxed{y=x^4-2x^2}$$

Ovo je traženo partikularno rešenje!

II tip

Drugi tip, malo složeniji je diferencijalna jednačina drugog reda u kojoj se javlja $y``, y`$ i x **a nema y.**

Matematički bi to zapisali $F(y``, y`, x) = 0$

Uvodimo smenu $\boxed{y` = p} \to y`` = p`$

Primer 3. Reši diferencijalnu jednačinu $y`` + y`tgx - \sin 2x = 0$

Rešenje:

$y`` + y`tgx - \sin 2x = 0$

Uvodimo smenu $\boxed{y` = p} \to y`` = p`$

$$y`` + y`tgx - \sin 2x = 0$$
$$p` + tgx \cdot p = \sin 2x$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina prvog reda, *"po p"*.

$$p(x) = e^{-\int P(x)dx}(c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$$

Iz $p` + tgx \cdot p = \sin 2x$ je $P(x) = tgx \wedge Q(x) = \sin 2x$

$$\int P(x)dx = \int tgxdx = -\ln|\cos x| = \ln(\cos x)^{-1}$$
$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int \sin 2x \cdot e^{\ln(\cos x)^{-1}}dx = \int 2\sin x \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}dx = \int 2\sin xdx = -2\cos x$$

$$p(x) = e^{-\int P(x)dx}(c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$$
$$p(x) = e^{-(-\ln(\cos x))}(C_1 - 2\cos x)$$
$$p(x) = \boxed{\cos x(C_1 - 2\cos x)}$$

Sad vratimo smenu: $y` = p$

$$y` = \cos x(C_1 - 2\cos x)$$
$$y` = C_1 \cos x - 2\cos^2 x = C_1 \cos x - 2\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)$$
$$\boxed{y` = C_1 \cos x - 1 - \cos 2x}$$

Ovo je sada diferencijalna jednačina prvog reda koja razdvaja promenljive:

$y`=C_1\cos x-1-\cos 2x$

$\frac{dy}{dx}=C_1\cos x-1-\cos 2x$

$dy=(C_1\cos x-1-\cos 2x)dx$

$\int dy=\int(C_1\cos x-1-\cos 2x)dx$

$y=C_1\int\cos xdx-\int dx-\int\cos 2xdx$

$\boxed{y=C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_2}$

III tip

Treći tip je je diferencijalna jednačina drugog reda u kojoj se javlja $y``, y`$ i y **a *nema ga x.***

Matematički bi to zapisali $F(y``,y`,y)=0$

Ove jednačine se rešavaju smenom $y`=p$**, ali pazimo , sada je** $y``=p\cdot\frac{dp}{dy}$**, odnosno** $y``=p\cdot p`$

Primer 4. Nađi opšti integral jednačine $y``+2yy`^3=0$

Rešenje:

$y``+2yy`^3=0$ uzećemo smenu $y`=p$ , odakle je $y``=p`p$

$p`p+2yp^3=0$ izvučemo p kao zajednički

$p(p`+2yp^2)=0$ odavde je $p=0$ ili $p`+2yp^2=0$

Za $p=0$ odmah dobijamo rešenje $y`=0$ to jest $y=C$ (konstanta)

$p`+2yp^2=0$

$\frac{dp}{dy}=-2yp^2$

$\frac{dp}{p^2}=-2ydy$ d.j. koja razdvaja promenljive, integralimo

$\int\frac{dp}{p^2}=\int-2ydy$

$-\frac{1}{p}=-2\frac{y^2}{2}+c_1$

$\frac{1}{p}=y^2-c_1$

$p=\frac{1}{y^2-c_1}$ vratimo $y`=p$

$y`=\frac{1}{y^2-c_1}$ Zamenimo da je $y`=\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - c_1}$$

$$(y^2 - c_1)dy = dx$$

$$\frac{y^3}{3} - c_1 y = x + c_2 \quad \text{opšti integral}$$

Dakle, rešenja su: $y = c$ i $\frac{y^3}{3} - c_1 y = x + c_2$

IV tip

LINEARNA HOMOGENA D.J. SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Njoj najpre pridružujemo karakterističnu jednačinu:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

U zavisnosti od rešenja karakteristične jednačine razlikujemo tri slučaja:

1) λ_1 i λ_2 su realna i različita, onda je : $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2) λ_1 i λ_2 su realna i jednaka rešenja , onda je : $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + x c_2 e^{\lambda_2 x}$

3) λ_1 i λ_2 su konjugovano kompleksni brojevi : $\lambda_1 = a+bi$, $\lambda_2 = a-bi$ ***, onda je*** $y(x) = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx$

PAZI : U KARAKTERISTIČNOJ JEDNAČINI NEKO UZIMA KAO SMENU *p*, NEKO *r*, A NEKO λ .

VI RADITE ONAKO KAKO RADI VAŠ PROFESOR! (u suštini je sve jedno)

Primer 5.

Nađi opšti integral jednačina:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$
b) $y'' - 2y + y = 0$
c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

Rešenje:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ najpre rešimo karakterističnu jednačinu

$p^2 - 3p + 2 = 0$ (1. slučaj)

$$p_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow p_1 = 2, p_2 = 1$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$$

b) y`` - 2y + y = 0 najpre rešimo karakterističnu jednačinu

$p^2 - 2p + 1 = 0$ (2. slučaj)

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = 1$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

c) y`` - 2y` +2y = 0

$p^2 - 2p + 2 = 0$ (3. slučaj)

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \frac{2(1 \pm i)}{2} \Rightarrow p_1 = 1 + i, p_2 = 1 - i$$

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$